好玩的数学

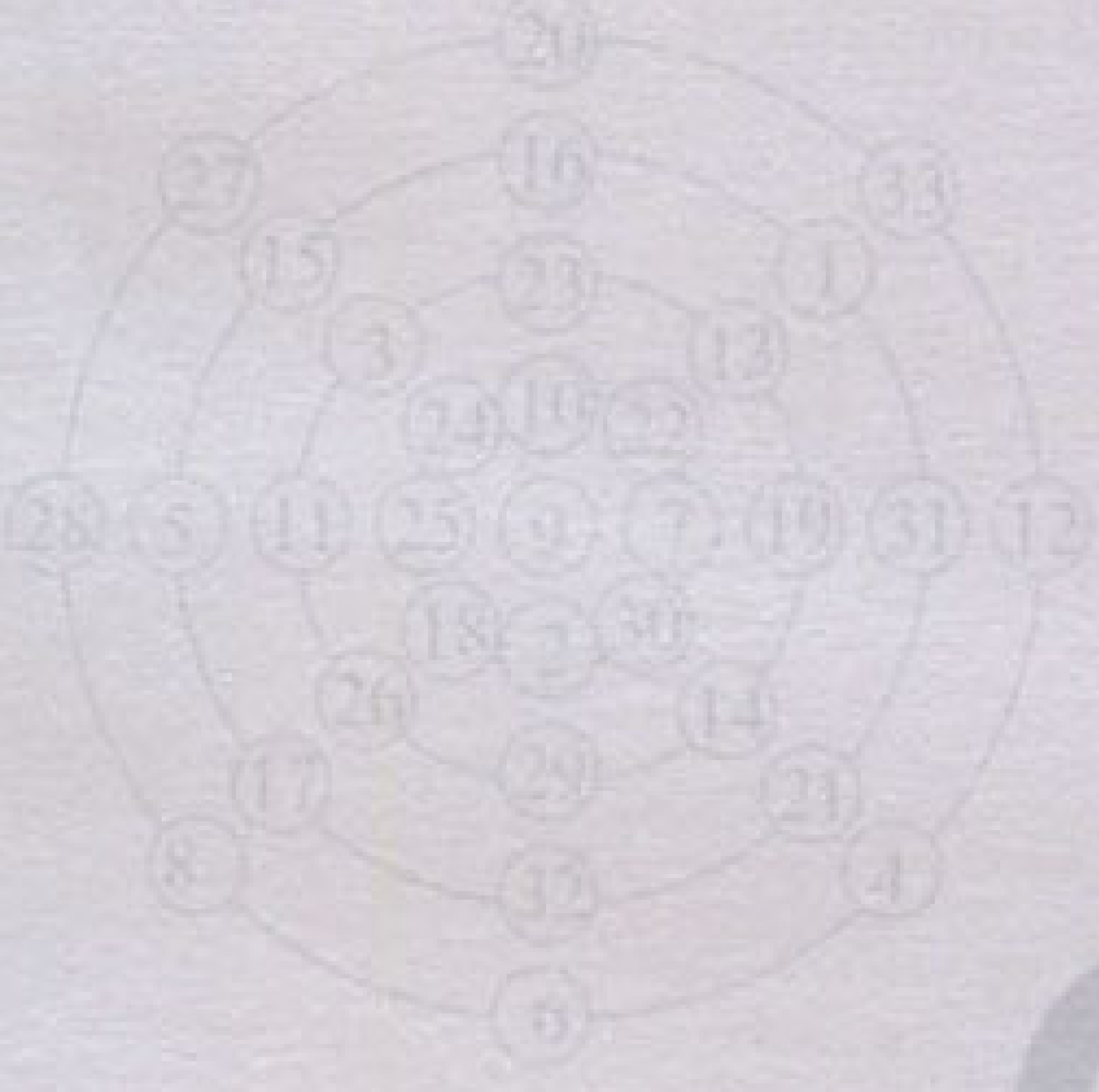
张景中 主编

郁祖权＝著 黄澍＝插图

# 中国古算解趣

展示“寓理于算，不证自明”的技艺

锤炼“小中见大，鸡刀宰牛”的功夫



科学出版社

www.sciencep.com

# 总　序

2002年8月在北京举行国际数学家大会（ICM2002）期间，91岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词，写下了“数学好玩”4个大字。

数学真的好玩吗？不同的人可能有不同的看法。

有人会说，陈省身先生认为数学好玩，因为他是数学大师，他懂数学的奥妙。对于我们凡夫俗子来说，数学枯燥，数学难懂，数学一点也不好玩。

其实，陈省身从十几岁就觉得数学好玩。正因为觉得数学好玩，才兴致勃勃地玩个不停，才玩成了数学大师。并不是成了大师才说好玩。

所以，小孩子也可能觉得数学好玩。

当然，中学生或小学生能够体会到的数学好玩，和数学家所感受到的数学好玩，是有所不同的。好比象棋，刚入门的棋手觉得有趣，国手大师也觉得有趣，但对于具体一步棋的奥妙和其中的趣味，理解的程度却大不相同。

世界上好玩的事物，很多要有了感受体验才能食髓知味。有酒仙之称的诗人李白写道：“但得此中味，勿为醒者传”，不喝酒的人是很难理解酒中乐趣的。

但数学与酒不同。数学无所不在。每个人或多或少地要用到数学，要接触数学，或多或少地能理解一

些数学。

早在2000多年前，人们就认识到数的重要。中国古代哲学家老子在《道德经》中说:“道生一，一生二，二生三，三生万物。”古希腊毕达哥拉斯学派的思想家菲洛劳斯说得更加确定有力：“庞大、万能和完美无缺是数字的力量所在，它是人类生活的开始和主宰者，是一切事物的参与者。没有数字，一切都是混乱和黑暗的。”

既然数是一切事物的参与者，数学当然就无所不在了。

在很多有趣的活动中，数学是幕后的策划者，是游戏规则的制定者。

玩七巧板，玩九连环，玩华容道，不少人玩起来乐而不倦。玩的人不一定知道，所玩的其实是数学。这套丛书里，吴鹤龄先生编著的《七巧板、九连环和华容道——中国古典智力游戏三绝》一书，讲了这些智力游戏中蕴含的数学问题和数学道理，说古论今，引人入胜。丛书编者应读者要求，还收入了吴先生的另一本备受大家欢迎的《幻方及其他——娱乐数学经典名题》，该书题材广泛、内容有趣，能使人在游戏中启迪思想、开阔视野，锻炼思维能力。丛书的其他各册，内容也时有涉及数学游戏。游戏就是玩。把数学游戏作为丛书的重要部分，是“好玩的数学”题中应有之义。

数学的好玩之处，并不限于数学游戏。数学中有些极具实用意义的内容，包含了深刻的奥妙，发人深

思，使人惊讶。比如，以数学家欧拉命名的一个公式

$$e^{2\pi i}=1$$

这里指数中用到的 $\pi$，就是大家熟悉的圆周率，即圆的周长和直径的比值，它是数学中最重要的一个常数。数学中第 2 个重要的常数，就是上面等式中左端出现的 $e$，它也是一个无理数，是自然对数的底，近似值为 2.718281828459…。指数中用到的另一个数 $i$，就是虚数单位，它的平方等于 $-1$。谁能想到，这 3 个出身大不相同的数，能被这样一个简洁的等式联系在一起呢？丛书中，陈仁政老师编著的《说不尽的 $\pi$》和《不可思议的 $e$》，分别详尽地说明了这两个奇妙的数的来历、有关的轶事趣谈和人类认识它们的漫长的过程。其材料的丰富详尽，论述的清楚确切，在我所知的中外有关书籍中，无出其右者。

如果你对上面等式中的虚数 $i$ 的来历有兴趣，不妨翻一翻王树禾教授为本丛书所写的《数学演义》的"第十五回　三次方程闹剧获得公式解　神医卡丹内疚难舍诡辩量"。这本章回体的数学史读物，可谓通而不俗、深入浅出。王树禾教授把数学史上的大事趣事憾事，像说评书一样，向我们娓娓道来，使我们时而惊讶、时而叹息、时而感奋，引来无穷怀念遐想。数学好玩，人类探索数学的曲折故事何尝不好玩呢？光看看这本书的对联形式的四十回的标题，就够过把瘾了。王教授还为丛书写了一本《数学聊斋》，把现代数学和经典数学中许多看似古怪而实则富有思想哲理的内容，像《聊斋》讲鬼说狐一样最大限度地大众化，努力使

读者不但“知其然”而且“知其所以然”。在这里，数学的好玩，已经到了相当高雅的层次了。

谈祥柏先生是几代数学爱好者都熟悉的老科普作家，大量的数学科普作品早已脍炙人口。他为丛书所写的《乐在其中的数学》，很可能是他的封笔之作。此书吸取了美国著名数学科普大师加德纳25年中作品的精华，结合中国国情精心改编，内容新颖、风格多变、雅俗共赏。相信读者看了必能乐在其中。

易南轩老师所写的《数学美拾趣》一书，自2002年初版以来，获得读者广泛好评。该书以流畅的文笔，围绕一些有趣的数学内容进行了纵横知识面的联系与扩展，足以开阔眼界、拓广思维。读者群中有理科和文科的师生，不但有数学爱好者，也有文学艺术的爱好者。该书出版不久即脱销，有一些读者索书而未能如愿。这次作者在原书基础上进行了较大的修订和补充，列入丛书，希望能满足这些读者的心愿。

世界上有些事物的变化，有确定的因果关系。但也有着大量的随机现象。一局象棋的胜负得失，一步一步地分析起来，因果关系是清楚的。一盘麻将的输赢，却包含了很多难以预料的偶然因素，即随机性。有趣的是，数学不但长于表达处理确定的因果关系，而且也能表达处理被偶然因素支配的随机现象，从偶然中发现规律。孙荣恒先生的《趣味随机问题》一书，向我们展示出概率论、数理统计、随机过程这些数学分支中许多好玩的、有用的和新颖的问题。其中既有经典趣题，如赌徒输光定理，也有近年来发展的新的

方法。

中国古代数学，体现出算法化的优秀数学思想，曾一度辉煌。回顾一下中国古算中的名题趣事，有助于了解历史文化，振奋民族精神，学习逻辑分析方法，发展空间想像能力。郁祖权先生为丛书所著的《中国古算解趣》，诗、词、书、画、数五术俱有，以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等40余个中国古算名题；以题说法，讲解我国古代很有影响的一些数学方法；以法传知，叙述这些算法的历史背景和实际应用，并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献做了简要介绍，的确是青少年的好读物。

读一读《好玩的数学》，玩一玩数学，是消闲娱乐，又是学习思考。有些看来已经解决的小问题，再多想想，往往有“柳暗花明又一村”的感觉。

举两个例子：

《中国古算解趣》第37节，讲了一个“三翁垂钓”的题目。与此题类似，有个“五猴分桃”的趣题在世界上广泛流传。著名物理学家、诺贝尔奖获得者李政道教授访问中国科学技术大学时，曾用此题考问中国科学技术大学少年班的学生，无人能答。这个问题，据说是由大物理学家狄拉克提出的，许多人尝试着做过，包括狄拉克本人在内都没有找到很简便的解法。李政道教授说，著名数理逻辑学家和哲学家怀德海曾用高阶差分方程理论中通解和特解的关系，给出一个巧妙的解法。其实，仔细想想，有一个十分简单有趣的解法，小学生都不难理解。

原题是这样的：5只猴子一起摘了1堆桃子，因为太累了，它们商量决定，先睡一觉再分。

过了不知多久，来了1只猴子，它见别的猴子没来，便将这1堆桃子平均分成5份，结果多了1个，就将多的这个吃了，拿走其中的1堆。又过了不知多久，第2只猴子来了，它不知道有1个同伴已经来过，还以为自己是第1个到的呢，于是将地上的桃子堆起来，平均分成5份，发现也多了1个，同样吃了这1个，拿走其中的1堆。第3只、第4只、第5只猴子都是这样……问这5只猴子至少摘了多少个桃子？第5个猴子走后还剩多少个桃子？

思路和解法：题目难在每次分都多1个桃子，实际上可以理解为少4个，先借给它们4个再分。

好玩的是，桃子尽管多了4个，每个猴子得到的桃子并不会增多，当然也不会减少。这样，每次都刚好均分成5堆，就容易算了。

想得快的一下就看出，桃子增加4个以后，能够被5的5次方整除，所以至少是3125个。把借的4个桃子还了，可知5只猴子至少摘了3121个桃子。

容易算出，最后剩下至少 $1024-4=1020$ 个桃子。

细细地算，就是：

设这1堆桃子至少有 $x$ 个，借给它们4个，成为 $x+4$ 个。

5个猴子分别拿了 $a$，$b$，$c$，$d$，$e$ 个桃子（其中包括吃掉的一个），则可得

$$a=(x+4)/5$$

$$b=4(x+4)/25$$
$$c=16(x+4)/125$$
$$d=64(x+4)/625$$
$$e=256(x+4)/3125$$

$e$ 应为整数，而 256 不能被 5 整除，所以（$x+4$）应是 3125 的倍数，所以

$$(x+4)=3125k\ (k\ \text{取自然数})$$

当 $k=1$ 时，$x=3121$

答案是，这 5 个猴子至少摘了 3121 个桃子。

这种解法，其实就是动力系统研究中常用的相似变换法，也是数学方法论研究中特别看重的“映射-反演”法。小中见大，也是数学好玩之处。

在《说不尽的 $\pi$》的 5.3 节，谈到了祖冲之的密率 355/113。这个密率的妙处，在于它的分母不大而精确度很高。在所有分母不超过 113 的分数当中，和 $\pi$ 最接近的就是 355/113。不但如此，华罗庚在《数论导引》中用丢番图理论证明，在所有分母不超过 336 的分数当中，和 $\pi$ 最接近的还是 355/113。后来，在夏道行教授所著《$\pi$ 和 $e$》一书中，用连分数的方法证明，在所有分母不超过 8000 的分数当中，和 $\pi$ 最接近的仍然是 355/113，大大改进了 336 这个界限。有趣的是，只用初中里学的不等式的知识，竟能把 8000 这个界限提高到 16500 以上！

根据 $\pi=3.14159265358979\cdots$，可得 $|355/113-\pi|<0.00000026677$，如果有个分数 $q/p$ 比 355/113 更接近 $\pi$，一定会有

$$|355/113 - q/p| < 2\times 0.00000026677$$

也就是

$$|355p - 113q|/113p < 2\times 0.00000026677$$

因为 $q/p$ 不等于 355/113，所以 $|355p - 113q|$ 不是 0。但它是正整数，大于或等于 1，所以

$$1/113p < 2\times 0.00000026677$$

由此推出

$$p > 1/(113\times 2\times 0.00000026677) > 16586$$

这表明，如果有个分数 $q/p$ 比 355/113 更接近 $\pi$，其分母 $p$ 一定大于 16586。

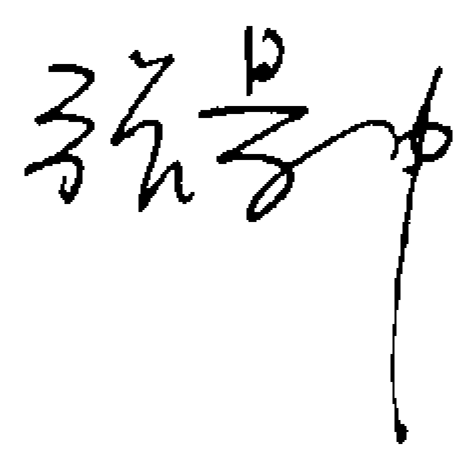
如此简单初等的推理得到这样好的成绩，可谓鸡刀宰牛。

数学问题的解决，常有“出乎意料之外，在乎情理之中”的情形。

在《数学美拾趣》的 22 章，提到了“生锈圆规”作图问题，也就是用半径固定的圆规作图的问题。这个问题出现得很早，历史上著名的画家达·芬奇也研究过这个问题。直到 20 世纪，一些基本的作图，例如已知线段的两端点求作中点的问题（线段可没有给出来），都没有答案。有些人认为用生锈圆规作中点是不可能的。到了 20 世纪 80 年代，在规尺作图问题上从来没有过贡献的中国人，不但解决了中点问题和另一个未解决问题，还意外地证明了从 2 点出发作图时生锈圆规的能力和普通规尺是等价的。那么，从 3 点出发作图时生锈圆规的能力又如何呢？这是尚未解决的问题。

开始提到，数学的好玩有不同的层次和境界。数学大师看到的好玩之处和小学生看到的好玩之处会有所不同。就这套丛书而言，不同的读者也会从其中得到不同的乐趣和益处。可以当做休闲娱乐小品随便翻翻，有助于排遣工作疲劳、俗事烦恼；可以作为教师参考资料，有助于活跃课堂气氛、启迪学生心智；可以作为学生课外读物，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。即使对于数学修养比较高的大学生、研究生甚至数学研究工作者，也会开卷有益。数学大师华罗庚提倡“小敌不侮”，上面提到的两个小题目都有名家做过。丛书中这类好玩的小问题比比皆是，说不定有心人还能从中挖出宝矿，有所斩获呢。

啰嗦不少了，打住吧。谨以此序祝《好玩的数学》丛书成功。



2004 年 9 月 9 日

# 《好玩的数学》编委会

**主　编**　张景中

**成　员**　（按汉语拼音字母排序）

陈仁政　孙荣恒　谈祥柏　王树禾

吴鹤龄　易南轩　郁祖权

# 前　言

本书从动议到脱稿已经18年了。

1986年黄山市程大位纪念馆建成，举行开馆典礼，同时举行纪念程大位逝世380周年学术会议。国内外许多专家学者如白尚恕、沈康身、李迪、李培业以及日本友人铃木久男等出席会议，交流研究成果、商讨珠算教育、算史研究、等级测试等有关事宜。李培业教授校注的《算法纂要校释》由安徽教育出版社出版，正式发行。同时决定出版《算法统宗》的校释本，开展明清时期皖南数学史的研究活动，重点探讨程大位、戴震、汪莱、梅文鼎、江永等人的数学成就和对社会的贡献。在此期间，原安徽教育出版社总编孙述庆先生认为《算法统宗》“难题”一章搜集了我国古代对儿童进行数学启蒙教育的名题，几百年长盛不衰，现在已日趋淡薄，希望能出一本小册子重点加以介绍，让这些群众喜闻乐道的趣题能够保存下来，并建议书名为《中国古算解趣》，以中小学生为对象，突出思想性、知识性和趣味性，不就题论题，而结合历史文化背景讲解，借以进行爱国主义教育和数学思想方法的教育；拓宽知识面，借题发挥，把古代一些有用的数学方法、理论成果结合起来，配合中小学的数

学学习，推进素质教育；适当配一点插画，增强可读性和趣味性。黄澍先生是我国书画名家，又是数学教授，请他仿丰子恺的笔法画几张插画，使栩栩如生的古人跃然纸上，让这本小册子具备诗、词、书、画、数五术俱有的韵味。这件事虽有点难，但却是一件好事，我们二人就将这个任务接受下来。白尚恕、沈康身、李迪、李培业、胡炳生等中算史专家多次到屯溪调研和交流学术，并将他们的研究成果赠送给我们，这些珍贵的礼物使我们获益匪浅。

另一方面，我们长时期从事大、中学校的数学教育，也感到这块阵地上“中算史”的教育亟待加强。这不光是进行爱国主义的思想教育，更应该拓宽我国传统数学的教育渠道，中西结合，在比较中提高。早在20世纪50年代初，胡术五、罗运楷、黄澍等在皖南屯溪中学任教，他们是中学教育界的名师，古算功底很深。也许是兴趣关系，他们断续地做过一些研究。60年代中期，胡退休在屯溪，应余介石先生之约，对《算经十书》、《梅氏丛书辑要》、《勾股举隅》等作了一些校点，对程大位、戴震、汪莱等的故里会同黄澍作了多次调查。1978年，安徽省数学会在旌德召开第二次年会，这是改革开放后的第一次大会，盛况空前，吴文俊、江泽涵等著名数学家出席会议。吴作了《希尔伯特的几何基础——兼谈中国古代数学的历史地位》的学术报告，历时4个小时，感人至深，特别是对中国古算的现代意义有了新的诠释。其时，吴先生在数学证明机械化方面，已取得了突破性的进展。嗣后，

我们将报告录音整理成文，并经吴先生审阅同意，印发给黄山市数学会的所有会员，大家都觉得在中学应加强中算史知识的教育。教育部最近颁布新的课程标准，数学史已列入选修内容，可算是众望所归。鉴于这样的背景，写此书既是压力，也是学习，更是机遇。

在取材方面，遵从述庆先生的意见，适当拓宽，结合中小学生的实际，把民间常用的算理算法向上一层次推进。以题引知，以点带面，对古算中常用的更相减损术、今有术、衰分术、方程术、盈不足术、大衍求一术和勾股术等都做了通俗易懂的介绍，注意古为今用、古今结合。不涉及高深领域，初高中学生能读懂全书；门槛很低，小学生也能跨进。在讲题之余，还用一定篇幅介绍民间速算、巧算的方法，这不是雕虫小技、节外生枝、而是为了从小训练数学思维能力和空间想像力。让中算“寓理于算，不证自明”的功夫能在下一代身上收到潜移默化的效果。

说句实在话，我们的古算功底很薄，基本上是“边学边卖”。几位友人的赠书是导航的明灯，指引我们突破了不少难点。因为我们对中小学生的情况比较了解，做二传手可以保证到位。这样，专家们的成果可输散到平民百姓之中，可以走到课外，走进家庭，走到“茶馆式”教学的餐桌，老少同堂，共探祖国的传统数学“难题”。

本书的写作得到很多人的帮助。孙老，最早的策划者，如今已经退休；胡升华先生继其后，不断鼓励敦促，使18年前的设想终于实现。中国珠算协会会长

朱希安先生，安徽省珠算协会会长许尊普先生十几年来一直关注我们的工作，创造条件邀请我们参加学会活动，使我们结识了许多学者专家；安徽省教育厅老领导王世杰先生一直关注本书的写作，鼓励我们把书写好；省教育厅、黄山学院的领导和同志们更是全力支持。今天能够交稿，确是大家帮助的结果。年事已高，力不从心，许多事也靠家人的支持，在此一并致谢。稿纸一交，了却一件心愿，颇以为慰，但愿对孩子们有点帮助。

作者识

2004年8月23日

# 目　录

**总序**

**前言**

**1 苏武牧羊**………… 1

为什么规定十九年七闰

祖冲之的贡献

**2 粒米求程**………… 5

积黍起度

**3 排鱼求数**………… 8

我国古代的计量制度

**4 三藏取经**………… 12

数的传说

**5 洛书释数**………… 16

杨辉和他的纵横图

**6 竿索求长**………… 22

“九九表”自荐的故事

筹算和珠算

**7 方田求积**………… 26

《九章算术》

好玩的数学

8 **凫雁相逢**………… 30

刘徽——中国第一代知名数学家

9 **书生分卷**………… 35

胡术五、黄澍寻访程大位故居

10 **以碗知僧**………… 40

珠算一代宗师——程大位

11 **五渠灌水**………… 44

更相减损术

12 **三女归宁**………… 49

最小公倍数

13 **环山相会**………… 52

从“三女归宁”到“环山相会”

五星同会

14 **三兵巡营**………… 59

求周期

15 **船缸均载**………… 64

怎样开平方

怎样记$(a+b)^n$的公式

16 **圆田求积**………… 70

刘徽割圆

17 **系羊问索**………… 76

珠算宝典——《算法统宗》

18 推车问里………… 80

祖冲之的“约率”和“密率”

连分数

19 僧分馒头………… 89

“生金蛋的母鸡”——“今有术”简介

20 客去忘衣………… 98

反比例和连比例

21 互易推本………… 105

22 诵课倍增………… 109

吴敬与《九章算法比类大全》

23 三等赔偿………… 112

衰分术简介

24 浮屠增级………… 120

我国最早的数学选拔赛

25 李白沽酒………… 123

递推公式 $a_{n+1}=ca_n+d$ 的应用

26 群羊逐草………… 131

一次假设法

27 隔墙分银………… 137

盈不足术简介

**28 蒲莞同高**………… 143

二次假设法

**29 双鼠穿垣**………… 150

盈不足术的应用与探究

**30 雉兔同笼**………… 159

我国古代的方程理论

**31 物不知数**………… 166

从“物不知数”谈起

《孙子算经》

**32 古算摘奇**………… 171

二谈“物不知数”

**33 韩信点兵**………… 176

孙子定理

**34 三偷盗米**………… 183

“大衍求一术”浅说

**35 百鸡问题**………… 195

时曰醇勤奋治学

陈景润解“百鸡问题”

**36 獐兔鼠歌**………… 201

更相减损法和二元一次不定方程

# 1 苏武牧羊

当年苏武去北边　不知去了几多年
分明记得天边月　二百三十五番圆
答曰：一十九年

选自《算法统宗》



苏武是西汉的使者，在公元100年奉命出使匈奴，被匈奴扣留并多方威胁诱降，始终坚贞不屈，大义凛然。后被流放北海（今贝加尔湖）牧羊，生活非常艰苦，不知过了多少年月，只记得天上月亮整整圆了235次，问苏武流放了多少年？

这是一个简单的小学数学题，用算式表示就是

$$235 \div 12 = 19 \cdots\cdots 7$$

本题不能答为十九年零七个月。因为根据中国农历十九年应有七个闰月，所以苏武在北海流放了十九年，直到匈奴与汉朝和好才遣送回国。

## 古往今来　为什么规定十九年七闰

这是一个必须解决的实际问题，千百年来汇集了几十代数学家、天文学家的智慧和心血。

大家知道，地球绕太阳一周所需的日数为一年。月亮绕地球一周所需的日数为一月。通常认为一年是360天，一月是30天，这样一年共有 $360 \div 30 = 12$ 个月。其实这是很不精确的数据。

我国对历法的研究有着悠久的历史，积累了大量的数据，有丰硕的研究成果。秦始皇统一六国以后，根据长期观测的数据，定一年为 $365\frac{1}{4}$ 天，一月为 $29\frac{499}{940}$ 天。依据这个结果颁布了统一的历法，叫颛顼历（zhuān xū 是传说中古代部族的领袖，号高阳氏。实际上颛顼历在周朝末年已经制定，秦朝统一施行）。这样一年应有

$$\frac{365\frac{1}{4}}{29\frac{499}{940}}=\frac{343335}{27759}=12\,\frac{10227}{27759}=12\,\frac{7}{19} \qquad (1\text{-}1)$$

个月。这个结果告诉我们，苏武在匈奴 235 个月恰好是 19 年。

## 智慧之光　　祖冲之的贡献

十九年七闰在我国使用了近二千年，随着观测精度的提高，发觉不够精确。古代数学家祖冲之在 1500 年前就提出“以旧章法，十九岁七闰，闰数为多，经二百年辄差一日，节闰既移，则应改法。”他实测地球绕太阳一周是 $365\frac{9589}{39491}$ 天，月亮绕地球一周是 $\frac{116321}{3939}$ 天。请读者根据这个数据再算一算一年应有多少个月？这个计算很繁难，包含了许多奥妙的问题，大家可以试试，即

$$\frac{365\frac{9589}{39491}}{\frac{116321}{3939}}=\frac{56815363956}{4593632611}=12\,\frac{1691772624}{4593632611}=? \qquad (1\text{-}2)$$

从中可以体会到我们的先辈在数字计算方面所取得的成就是非常巨大的。

祖冲之根据这个计算结果修改原来的历法，制定了《大明历》，于公元 462 年建议：“以旧法一章十九岁有七闰，闰数为多，经二百年辄差一日，……今改章法三百九十一年有一百四十四闰，”并认为“将来永用，无复变动。”请同学们检查一下，你得到了祖冲之的结果了吗？当时祖冲之仅 33 岁，这个结果不仅显示了他的数学天才，更体现了他的精神：深入实

际，精确测量，认真钻研，改革算法，既不虚推古人，也不迷信权威，这都是值得我们学习的。

我国古代数学素以计算见长，通过直接的途径把理论和实践结合起来，奠定了正确反映现实世界的理论基础。从这个简单的例子就可以看出我国传统数学的特有风格。

**读读练练**　　**练　习　题**

约简下列分数：

1. $\frac{10227}{27759}$；　　2. $\frac{1691772624}{4593632611}$

答案：1. $\frac{7}{19}$；　2. $\frac{144}{391}$

提示：参看“更相减损法”。

# 2 粒米求程

**庐山山高八十里　山峰顶上一粒米**

**黍米一转只三分　几转转到山脚底**

**答曰：四百八十万转**

选自《算法统宗》

本题是说庐山从山顶到山脚有一条 80 里长的道路，山顶上有一粒黍米，滚动一周，行程 3 分，问沿着这条路滚到山脚底，共转了多少周？

需要说明的是，这是一个明代的题，取明朝的度量制度，1 步 = 5 尺，1 里 = 360 步。

**解**　因为，1 里 = 360 步，1 步 = 5 尺 = 500 分

$$80 \times 360 \times 500 \div 3 = 4800000 \text{（转）}$$

所以，黍米转了 480 万转。

## 中算典故　　积黍起度

这是一个很简单的四则趣题。为什么借“黍米”来命题呢？这与我国度量衡制度形成的历史背景有关。这里我们讲一个“积黍起度”的典故。

数学源于生活，度量衡制度的建立是生活的需要。何谓度量衡？“度，乃分别长短之法也”。“量，乃分别多寡之法也”。

“衡，乃分别轻重之法也”。古代建立度量衡制度的“标准参照物”是什么呢？《说苑·辨物篇》：“度量权衡，以黍生之。十黍为一分，十分为一寸，十寸为一尺，十尺为一丈。”《汉书·律历志》云：“以子谷秬（jū）黍中者度之，九十分为黄钟之长，十黍为分，十分为寸，十寸为尺。”当时，还确定以山西上党境内者为佳。所谓“积黍为度”，就是以一定数量的中等秬黍积累起来，作为度量的基本单位。

量的单位是以中等秬黍一千二百粒为一勺，十勺为一合（gě），十合为一升，十升为一斗，十斗为一斛（hú）。

衡的单位是定一勺重十二铢，二十四铢为一两，十六两为一斤，三十斤为一钧，四钧为一石（dàn）。

需要说明的是度量衡起源的标准并不统一。在人类社会的早期，各人群、部落约定不同的标准是可能的。传说我国夏禹以自己身高定为一丈。又如《孙子算经》载：“度之所起于忽，欲知其忽，蚕吐丝为忽，十忽为一丝，十丝为一毫，十毫为一厘，十厘为一分，十分为一寸，……。称之所起，起于黍，十黍为一垒，十垒为一铢，二十四铢为一两，……。量之所起于粟，六粟为一圭（gūi），十圭为一撮，十撮为一抄，十抄为一勺，……”。起源之说虽然不一，从中可以看出，我国以农立国，度量权衡，无一不与农业有关，但最终要靠国家立法，定为制度。

春秋战国时代，各国各自为政，度量制度很不统一，秦始皇统一六国以后，规范了文字，统一了货币和度量衡。这样秦制就成了我国度量制度的基础，一直延续下来。

**读读练练**

## 练 习 题

1. 今有屋基，南北三丈，东西六丈，欲以砖砌之。凡积二尺，用砖五枚，问计几何？

答曰：四千五百枚。

2. 今有索长五千七百九十四步，欲使作方问几何？

答曰：一千四百四十八步三尺。

选自《孙子算经》

提示：求正方形边长。1 步=6 尺。

# 3 排鱼求数

**三寸鱼儿九里沟　口尾相衔直到头**

**试问鱼儿多少数　请君对面说因由**

**答曰：五万四千个**

选自《算法统宗》

这是给儿童们计算的一道游戏题，目的在于巩固乘除运算方法。

已知3寸长的小鱼一个一个头尾相接排在一条9里长的水沟中，请问一共有多少条鱼？

按照明朝的度量制度，1里＝360步，　1步＝5尺＝50寸。

所以鱼的个数是

$$9\times360\times50\div3=3240\times50\div3=54000\text{（条）}$$

## 古往今来　　我国古代的计量制度

长度：引、丈、尺、寸、分五种长度单位，合称五度，都是十进。其下还有厘、毫、秒、忽四种十进长度单位。

土地丈量中还有长度单位“步”，中国古代所说的步相当于今“步”的二倍。

秦汉时规定：1 步 = 6 尺，1 里 = 300 步 = 1800 尺
这个制度一直沿用到唐代，自唐以后改为：1 步 = 5 尺，1 里 = 360 步。

此外，量布时还有单位“匹”：1 匹 = 4 丈。

地积：1 亩 = 60 方丈 = 240 方步，1 顷 = 100 亩。

容积：《汉书·律历志》载，斛、斗、升、龠（yuè）、合（gě）合称五量，其中 1 合 = 2 龠，其余都是十进。

重量：《汉书·律历志》载，石、钧、斤、两、铢合称五权，其进制是

1 石 = 4 钧　1 钧 = 30 斤　1 斤 = 16 两　1 两 = 24 铢

时间：相传我国在夏朝（四千多年前）就有了历法，所以叫“夏历”，又叫农历。一年分 12 个月，大月 30 天，小月 29 天，闰年加一个月。全年 354 日。1 日分 12 个时辰，子正在午夜 0 时，子初在夜 11 时整，子终在凌晨 1 时整。白天、黑夜各 6 个时辰，白天从卯初起算，申终完了。

现在国际上规定了一套统一的单位叫做国际单位制，简称 SI。我国于 1984 年宣布，采用国际单位制为本国法定单位的基础。

长度单位为米，记以“m”。起初规定，1m 等于通过法国巴黎的地球子午线总长的四千万分之一。根据这个规定，测得光速为 299792458 米/秒（即人们常说的每秒 30 万公里）。由于光速的恒定性，1983 年作出了更严密的规定。即 1m 等于光在真空中 1/299792458 秒的时间所走的距离。

要注意公制和市制的换算关系：

1 米 = 3 尺　1 公里 = 2 市里　1 市里 = 500 米

1 公顷 = 10000 平方米 = 100 公亩 = 15 市亩　1 市亩 = 60 平方丈

关于古制和今制的换算，根据专家们对秦汉时期文物的测定，以下数据可供参考

1 尺≈23.1 厘米　1 斤≈250 克　1 升≈200 立方厘米

这些关系建立了古今联系，在研究、分析古代一些社会经济问题时还是很有用的。

**例**　秦始皇在位期间，建造了许多豪华的宫殿，其中阿房宫最为华丽。据记载，“前殿东西 500 步，南北 50 丈，可坐 1 万人，能竖 5 丈高的旗杆。”试按今制计算一下这个宫殿的建筑面积和旗杆的高度。

**解**　东西长：500 步 = 500×6 尺 = 3000 尺

= 3000×0.231 米≈693 米

南北长：50 丈 = 500 尺≈115.5 米

面积：　693×115.5 = 80041.5 平方米≈120 亩

旗杆高：50×0.231≈11.6 米

**读读练练**

## 练　习　题

1.　　老人问甲歌

有一公公不记年　手持竹杖在门前　借问公公年几岁

家中数目记分明　一两八铢泥弹子　每岁盘中放一丸

时长日久被淋湿　浑然化作一泥团　秤重八斤零八两

细算才知得几年

答曰：一百零二岁

选自《算法统宗》

2. 据《三国演义》记载，刘备身高 7.5 尺，关羽身高 9.3 尺，张飞身高 8 尺，关羽的青龙偃月刀重 82 斤，试按今制算一算他们身高和刀重。

答案：刘备 1.73 米，关羽 2.15 米，张飞 1.85 米，刀重 20.5 公斤。

# 4 三藏取经

三藏西天去取经　一去十万八千程

每日常行七十五　问公几日得回程

答曰：一千四百四十日

选自《算法统宗》



这是根据《西游记》中的故事编写的一道趣题，练习简单的四则运算。三藏是指唐代高僧玄奘，俗称唐僧，受唐朝派遣，到印度钻研佛教典籍，译出经、论七十五部，一千三百三十五卷，促进了中印文化的交流。

三藏按原义来说是佛教经典的总称。它分为经、律和论三类，通常对通晓三藏的僧人尊称其为“三藏法师”。

本题是说，唐僧去西天取经，一共走了十万八千里。已知他每天走七十五里，问一共走了多少天？

$$108000 \div 75 = 1440 \text{（天）}$$

$$1440 \div 360 = 4 \text{（年）}$$

所以，唐僧去西天取经共走了 1440 天，合 4 年。

## 古往今来　数的传说

数字产生于人类生产、生活的需要。凡是有人群生活的地方，就必然要记数、要运算，即使在原始时代也是如此。“上古结绳而治，后世圣人易之以书契”（《易经》），实质上就标志了数的产生。但在远古时代，对数是如何产生的，伤们作了许多猜想，并结合祖先改造自然的重大事件或文化上的突出成就编造了许多神奇的故事一直流传至今，这不是无中生有，但也不会那么神奇，这里包含了人民对祖先的敬重。

最突出的两个传说是“河图洛书”与“隶首作数”。传说伏羲氏与女娲（wā）氏相婚，产生了人类。伏羲称王以后，有龙马从黄河里负河图出水，献给伏羲，这是一幅数字、星座的排列图，伏羲据此画了“八卦”，编了《周易》，又经孔子研究修改列为儒家经典，称为《易经》，被世人誉为“神州第一

奇书”。又传说大禹治水有功，有神龟从洛水出现，背负洛书献给大禹，据此编成《洪范九畴》，作为治理天下之大法。“图书”一词也就源出于此。河图、洛书（图 4-1）的数学价值很高，根据河图画出的八卦实际上就是最早的二进制。18 世纪

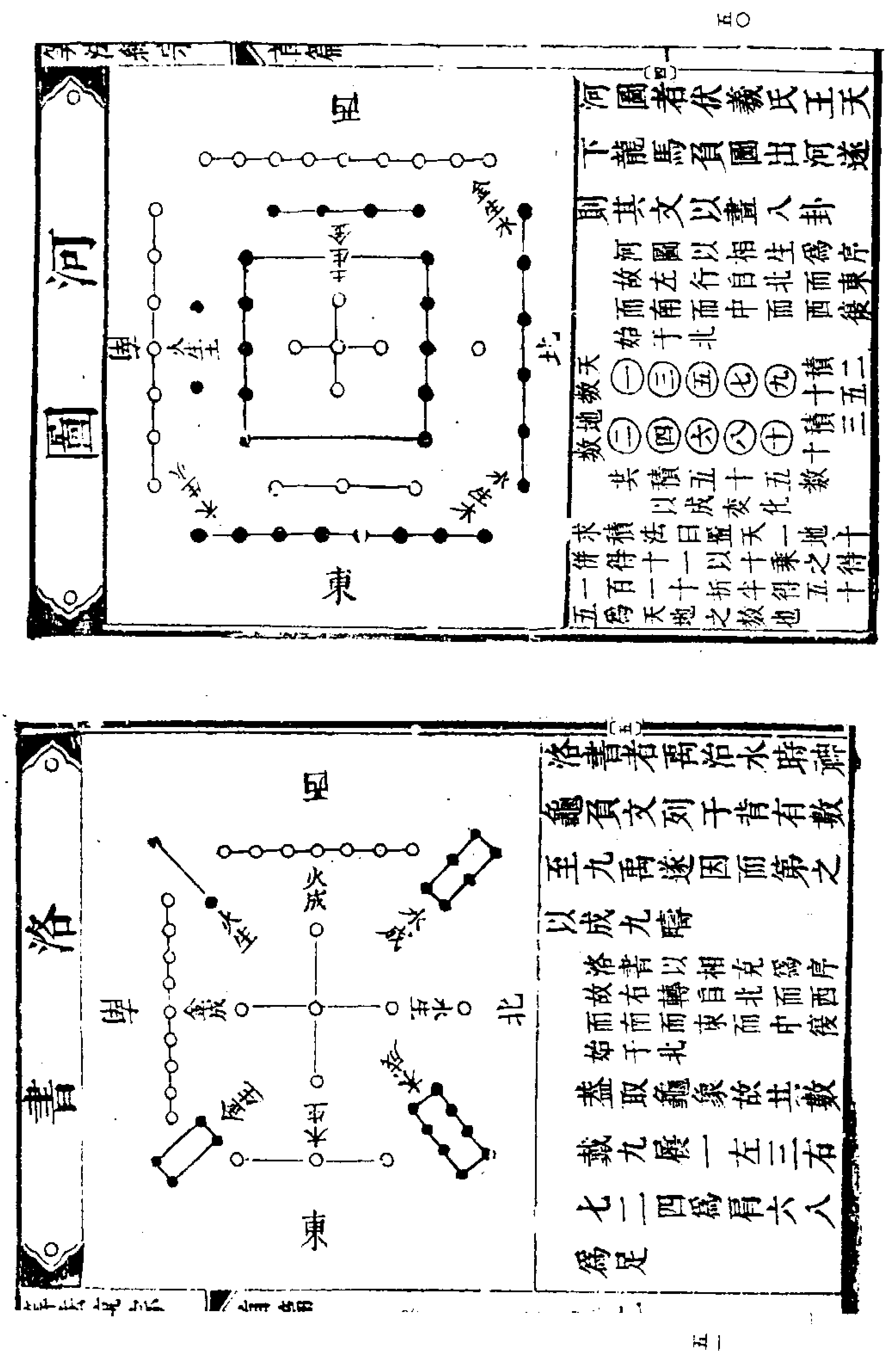


图 4-1

德国数学家莱布尼茨创立二进制时，就是受八卦的启发，他自己也承认，他只不过是重新发现了中国古代数学中的秘密而已。洛书，列成数表就是一张纵横图，是现代组合数学中最古老的例子，是训练思维的数学幻方，如今在程序设计、图论等方面都有广泛的应用。

到了黄帝时代，又有了进一步的概括和发展，黄帝命他的史官隶首作数，这样，数就产生了。“隶首”二字又往往成为我们中国数学事业的代名词。

**读读练练**　　**练　习　题**

1.　　笔套取齐

八万三千短竹竿　将来要把笔头安

管三套五为期定　问君多少能完成

答曰：管套 155625 个，管竹 51875 竿，套竹 31125 竿。

选自《算法统宗》

说明：一竿竹可截成毛笔管 3 个，或截成毛笔套 5 个。今有短竹 83000 竿，如何裁截配套成笔？

2.　　数珠一串

今有数珠一串　数来仔细分明

三枚无剩五无零　七个约之恰尽

欲问共该多少　推穷妙法门庭

知公能算惯纵横　此法不难易懂

答曰：105

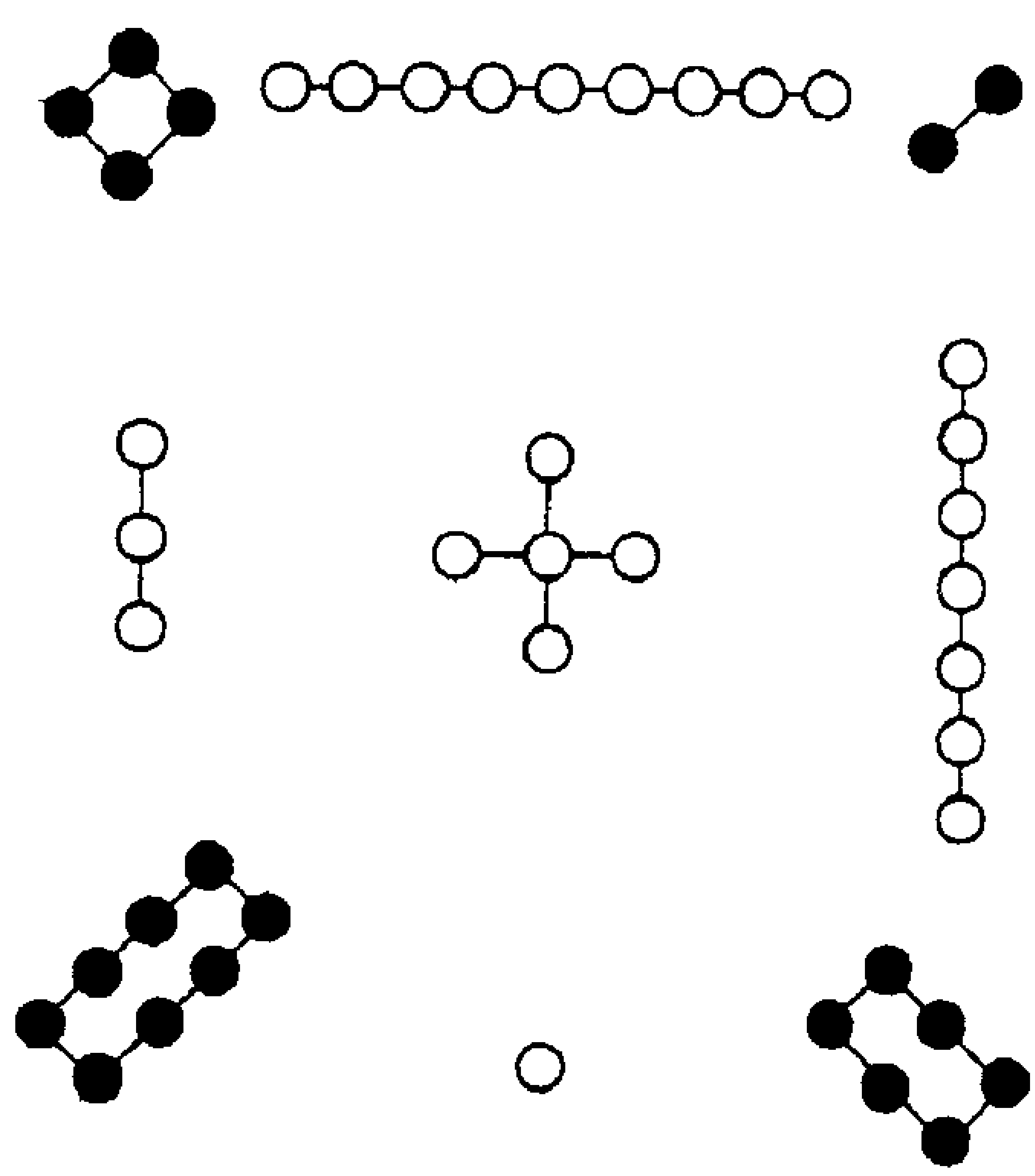
选自《九章算法比类大全》

提示：3，5，7 的最小公倍数。

# 5 洛书释数

**洛书盖取龟象，故其数戴九履一，**
**左三右七，二四为肩，六八为足。**

选自朱熹《易图》

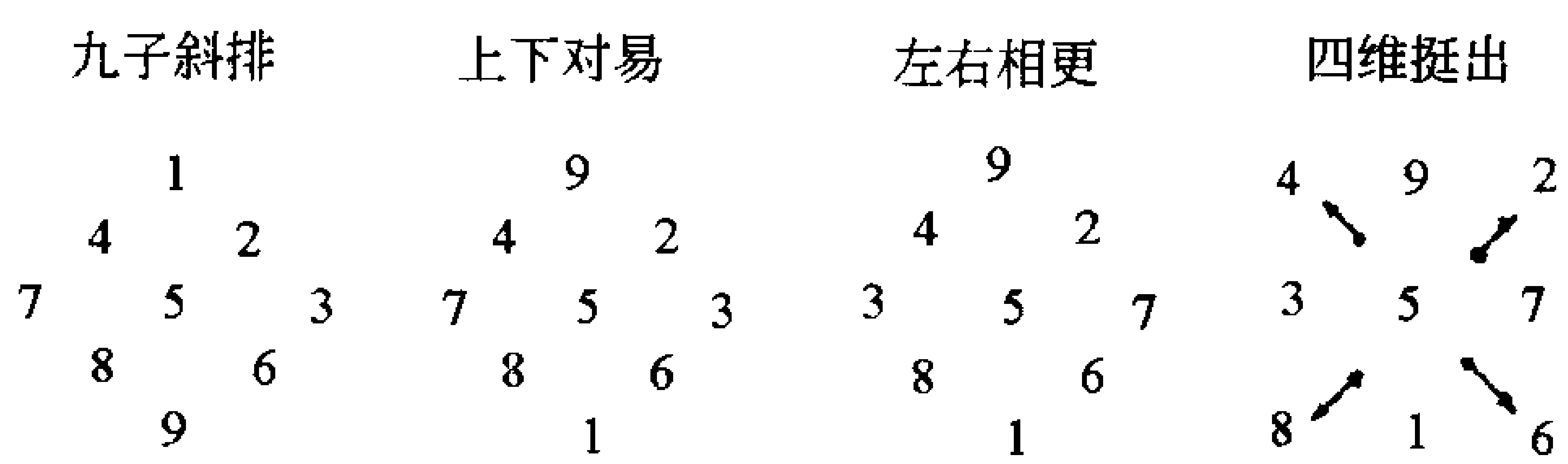


洛书

事实上，这是一个三行三列的数字方阵，它的每行、每列和两条对角线上三个数字之和都相等。

请大家想一想：给出 1，2，3，…，9 这 9 个数字，怎样排出一个三行、三列的数字方阵，满足上述条件呢？

南宋数学家杨辉概括了本题的解答方法：“九子斜排，上下对易，左右相更，四维挺出。”画出图来就十分清楚了。




四角上的元素 4，2，8，6 从原来的位置上向四个角的方向挺出，拉成一个方阵，这样就从一个龟形“戴 9 履 1，左 3 右 7，2、4 为肩，6、8 为足”变成一个正方形的方阵了。

北周甄鸾注《数术记遗》时，把洛书方阵称为“九宫”，将 9 个数字定位在图中 9 个位置，以此为基础创造一种算具，叫“九宫算”，作为算筹计算的工具，现在已经不用了。

## 数学家　　杨辉和他的纵横图

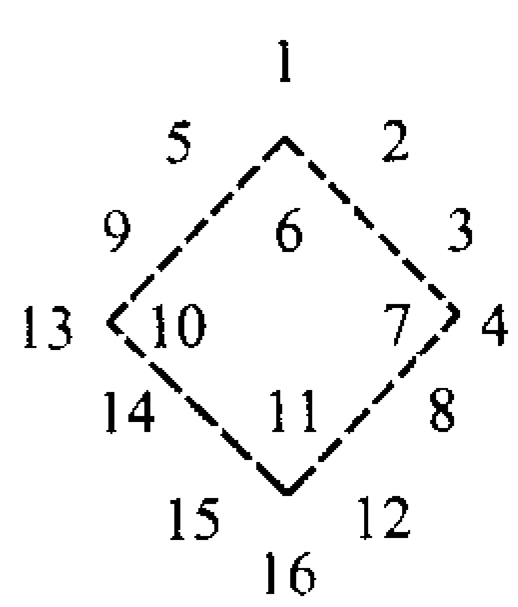
杨辉是我国古代著名的数学家和数学教育家。南宋（公元 13 世纪）钱塘（今杭州）人，曾任过地方行政官员。他深入实际，廉政爱民，不仅研习了古代算书，还广泛搜集流传在民间的诸多算法和典型问题，进行详解细演，比类分析，有极高的教育价值。人们称赞他“以廉饬（chī，告诫）已，以儒饰（shi 整治）吏，吐胸中之灵机，续前贤之奥旨，从奇而偶，由

晦而彰”（永嘉陈几先《日用算法》跋）。一生著作甚多，但散失严重。现存有：《详解九章算法》（1261 年）、《详解算法》（1262 年）、《乘除算法通宝》（1274 年）、《续古算法摘奇》（1275 年）、《田亩比类乘除捷法》（1275 年）等。

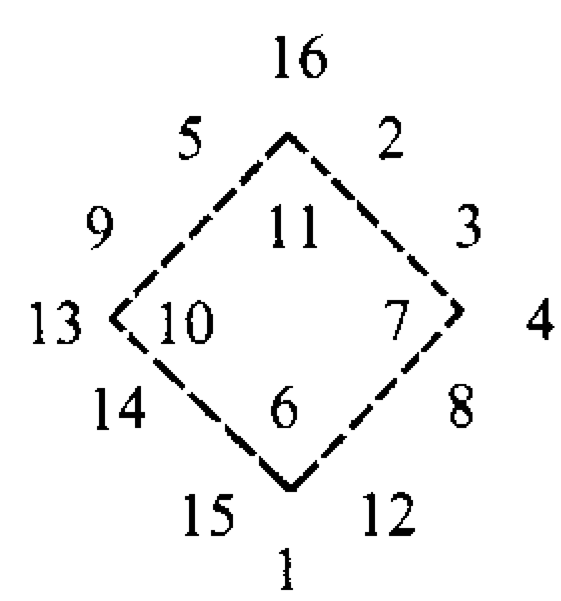
杨辉对“九宫图”进行了深入的研究，并把它命名为《纵横图》，从三阶推广到高阶，取得了一系列重要的成果。现在人们习惯地把纵横图称为幻方。所谓 $n$ 阶幻方，就是把 1 至 $n^2$ 个自然数排成 $n$ 行、$n$ 列的方阵，使它的每行、每列和每条对角线上数的和都相等。九宫图就是一个三阶幻方，杨辉给出了编制的方法。

对于四阶幻方可以沿三阶的思路，也不难构造。

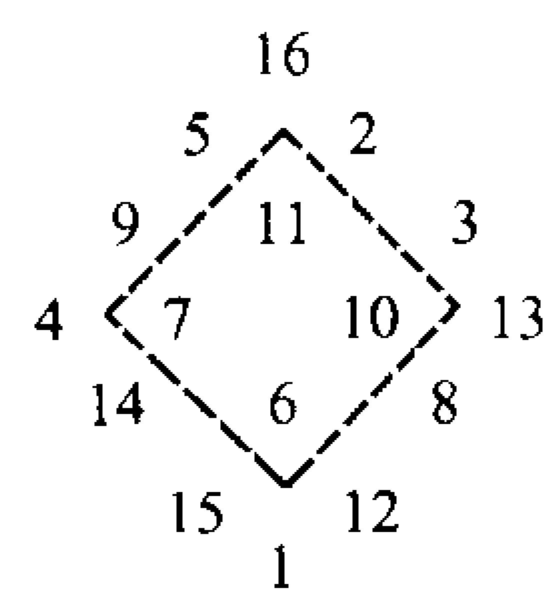
方阵斜排




上下对易




左右相更



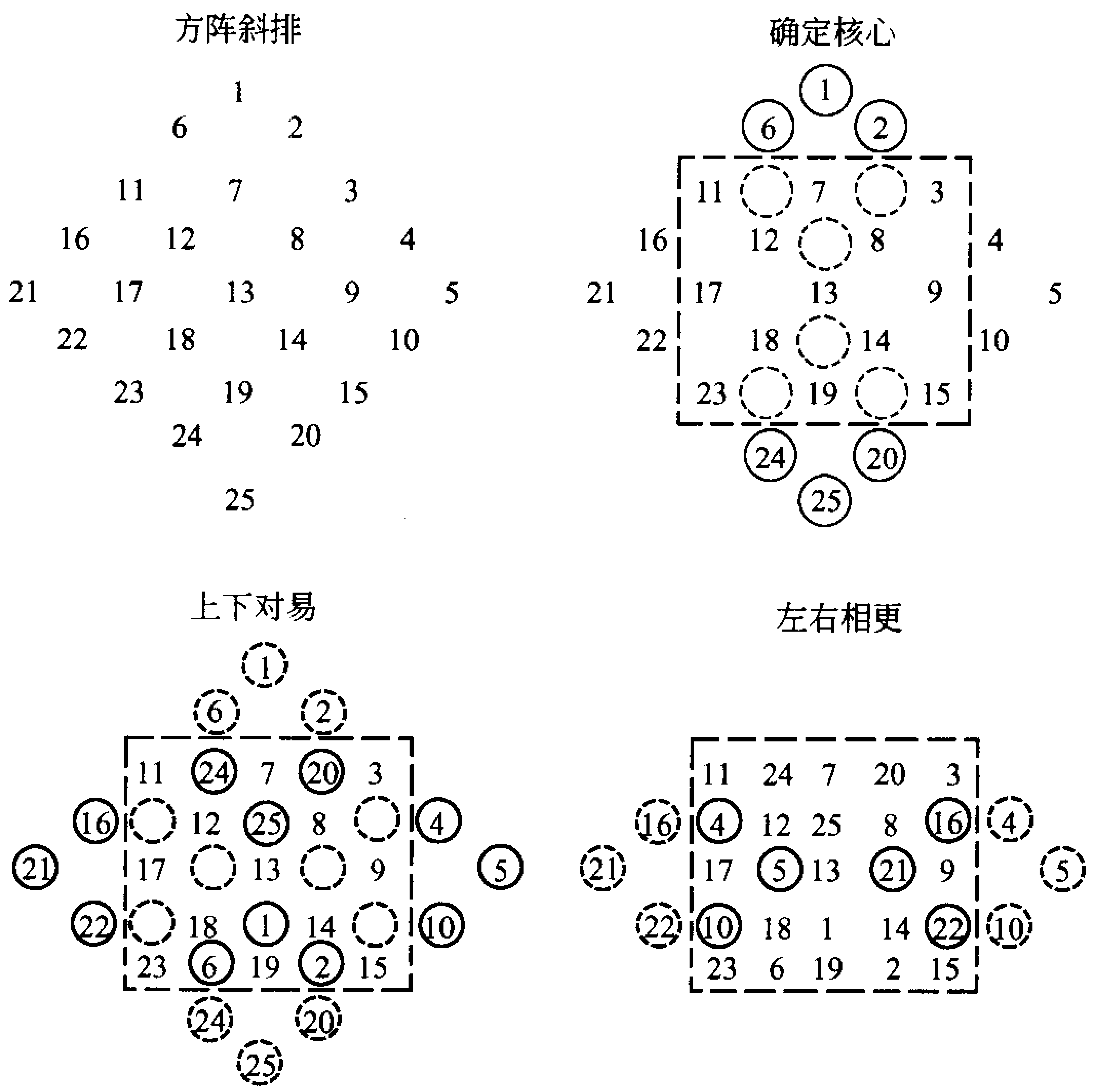

转正放平

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 5 | 16 |
| 14 | 7 | 11 | 2 |
| 15 | 6 | 10 | 3 |
| 1 | 12 | 8 | 13 |

注意：中间虚线构成的小正方形，也进行上下对易和左右相更的变换，求其平衡，使各行各列和主对角线各数字之和相等。

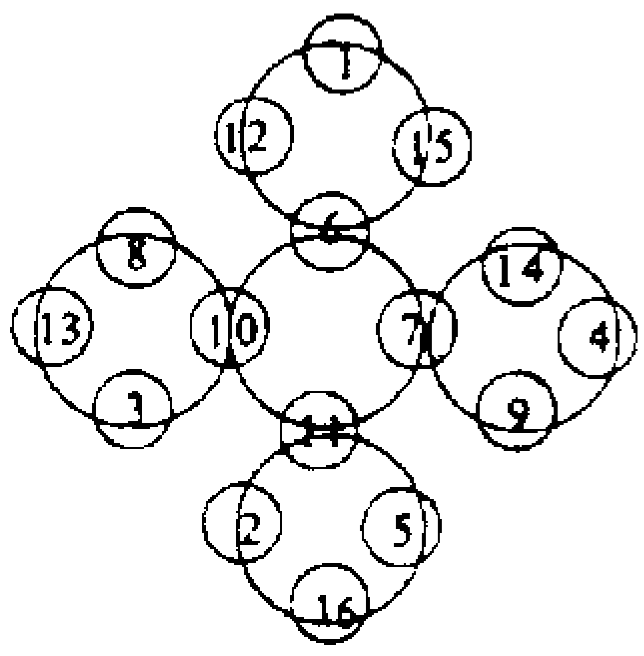
对于 $n=5$ 的情况，可以拓宽思路，用类似的方法构造 5 阶幻方。

各子斜排以后，确定核心正方形 11，3，15，23，形外的上、下、左、右四块，通过对易和相更，整体移入形内，就得到一个五阶幻方。当然，研究问题的路子是多种多样的，同学们可以充分发挥自己的创造力，“八仙过海，各显神通”。




小小的数字方块，却蕴含着巨大的魔力，成为人类智力磨炼的宽阔操场，吸引了世界上众多的数学家、数学爱好者，甚至幼儿园的娃娃们不断地研究、发掘、创新、应用。直至今天，还充满着青春的活力。

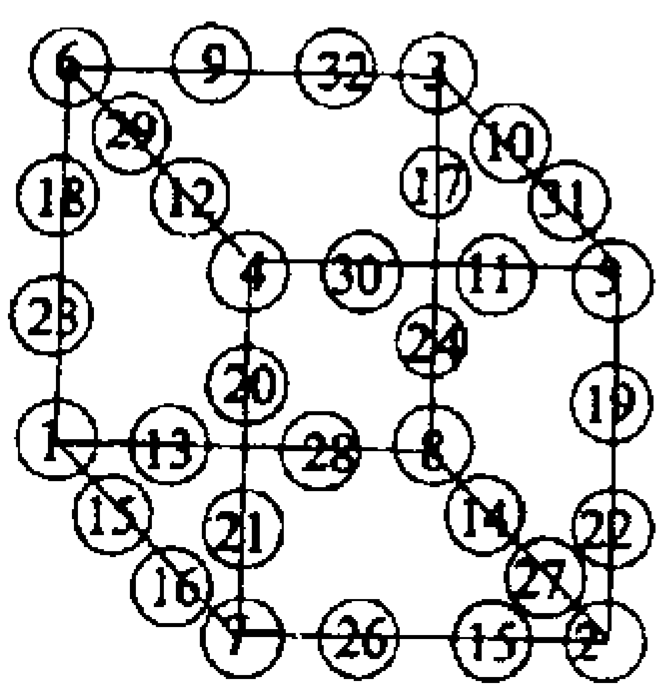
杨辉在他的《续古算法摘奇》里列举了 5—10 阶的纵横图（图 5-1），还编拟了多幅其他形式的连环图，他的详解细算激发了明清两代数学家的灵机，程大位、张潮、保其寿等都编造了不少新形式的纵横图和连环图，选编几幅供大家研究。



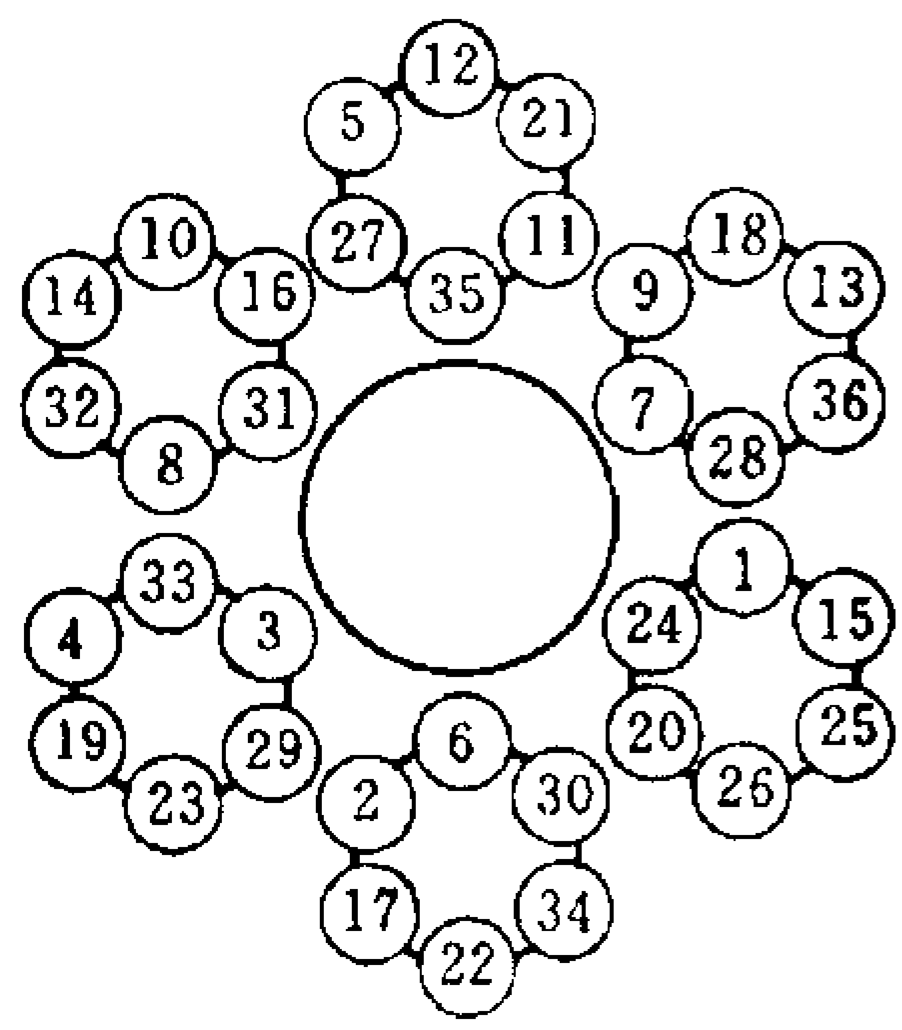

(1) 张潮揲四图

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 5 | 96 | 70 | 82 | 19 | 30 | 97 | 4 | 42 |
| 66 | 43 | 1 | 74 | 11 | 90 | 54 | 89 | 69 | 8 |
| 46 | 18 | 56 | 29 | 87 | 68 | 21 | 34 | 62 | 84 |
| 32 | 75 | 100 | 47 | 63 | 14 | 53 | 27 | 77 | 17 |
| 22 | 61 | 38 | 39 | 52 | 51 | 57 | 15 | 91 | 79 |
| 31 | 95 | 13 | 64 | 50 | 49 | 67 | 86 | 10 | 40 |
| 83 | 35 | 44 | 45 | 2 | 36 | 71 | 24 | 72 | 93 |
| 16 | 99 | 59 | 23 | 33 | 85 | 9 | 28 | 55 | 98 |
| 73 | 26 | 6 | 94 | 88 | 12 | 65 | 80 | 58 | 3 |
| 76 | 48 | 92 | 20 | 37 | 81 | 78 | 25 | 7 | 41 |

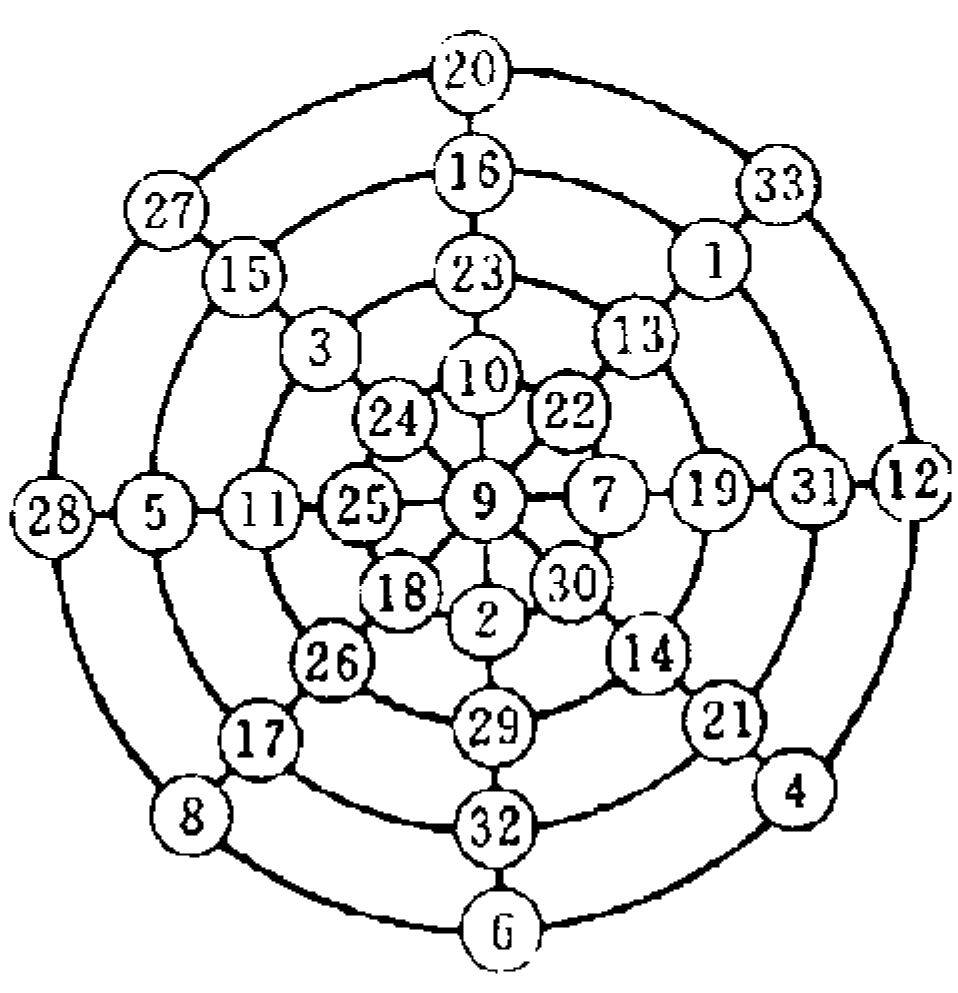
(2)张潮百子图



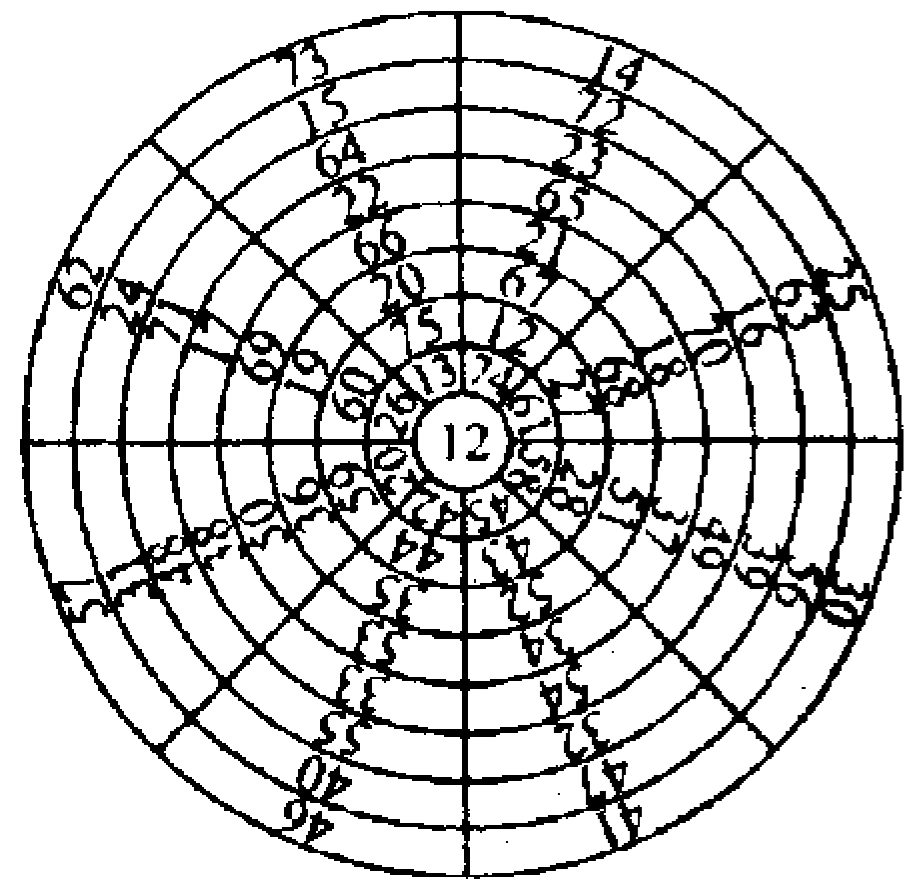
(3)保其寿立体纵横图




(4)杨辉聚六图




(5)杨辉聚九图



(6)美国开国元勋
B.富兰克林的幻圆

**图 5-1**

图 5-1（6）中：

①八个同心圆上八个数（连同中心数）的和是 360。

②八条半径上九个数的和都是 360。

③相邻四格（不论在什么位置）中元素和连同中心数之半都是 180。

**读读练练**　　　　**练　习　题**

请你再排一个四阶幻方和五阶幻方（取数 12～75）。

# 6 竿索求长

**一枝竹竿一条索　索比竿子长一托**

**对折索子来量竿　却比竿子短一托**

**答曰：竿长一丈五尺，索长二丈**

选自《算法统宗》

“托”是民间丈量绳子长度的一种常用方法，一般为平伸二臂、两中指间的距离。《算法统宗》中认定 1 托 = 5 尺。

**解法 1**　二元一次方程组

设索长为 $x$ 托，竹竿长为 $y$ 托，则

$$\begin{cases} x - y = 1 & (6\text{-}1) \\ y - \dfrac{1}{2}x = 1 & (6\text{-}2) \end{cases}$$

(6-1) + (6-2) 得

$$\frac{1}{2}x = 2$$

所以

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

即索长 4 托 = 2 丈，竿长 3 托 = 1 丈 5 尺。

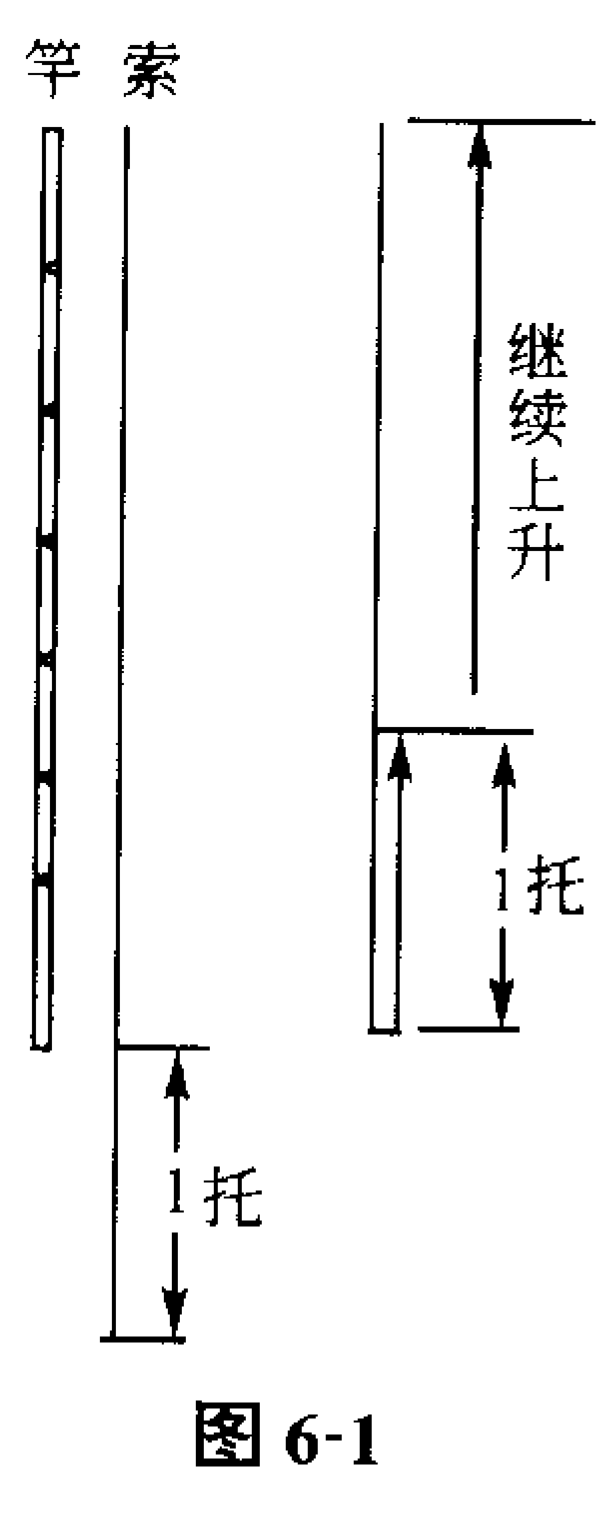



**图 6-1**

**解法 2**　图示法

画一个简图，用心算（如图 6-1）。先将绳索超出竹竿的部分折回并继续上升，注意上升的高度是下面绳索比竹竿缩短的部分的 2 倍，即上

升2，下缩1。到绳索双折后，下缩1托。故上升2托，这样索总长4托，竿长3托。

对于这样一个简单题，最好不用方程来解，在头脑里想像一个图形，让绳索动起来，在运动的状态中找索与竿的数量关系，发现“上2缩1”的比例，从而找到答案。这就是从小训练儿童的“空间想像力”的方法，这是一种重要的数学能力。

## 古算故事　“九九表”自荐的故事

为了说明我国很早就掌握了整数四则运算的方法，这里讲一个小故事。大家知道筹算乘除都要用口诀。古代的乘法口诀是从“九九八十一”起到“二二如四”止，只有36句，与现在流行的顺序相反，因为开头两个字是“九九”，故“九九”在古代既作为乘法口诀的简称，又作为当时实用算术的代名词。

西汉韩婴在《韩诗外传》写了一个寓言：“齐桓公设庭燎，为便人欲造见者。期年而士不至。于是东野有鄙人以九九见者。桓公使戏之曰，九九足以见乎？鄙人曰，……夫九九薄能耳，而君犹礼之，况贤于九九者乎？……。桓公曰，善。乃因礼之。期月，四方之士相导而至矣。”意思是说，齐桓公在宫廷设烽火招贤，过了一年无人应征。东郊有一个粗野的汉子以九九表自荐，齐桓公使人取笑他，九九表能作为一技之长吗？那人说，“九九表虽然算不了什么，如果大王也能重用，那么有才干的人自然就会来应聘了”。齐桓公从优接待了他。一月以后，四方有识之士就纷纷投奔齐国。齐桓公终于成了春秋五

霸中的第一霸。

这个故事告诉我们，在春秋时代，乘除运算已家喻户晓了。

## 智慧之光　　筹算和珠算

过去我们把小学数学叫做算术，实际上这是中国古代数学的总称，其原始意义是运用算筹的技术，所以也有用“筹算”二字来代表中国古代数学的，它是我国传统数学的根本。

据《汉书·律历志》载，算筹系竹制圆形棒，直径1分，长6寸。相传从西周时代人们就开始用算筹在毡毯上或木板上进行各种运算，这种计算工具延续到宋元。在长达二千多年间，它是我国各行各业通用的计算工具。

算筹记数有2种图式：

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 纵式 | 𝍠 | 𝍡 | 𝍢 | 𝍣 | 𝍤 | 𝍥 | 𝍦 | 𝍧 | 𝍨 |
| 横式 | 𝍩 | 𝍪 | 𝍫 | 𝍬 | 𝍭 | 𝍮 | 𝍯 | 𝍰 | 𝍱 |

分别表示1，2，3，4，5，6，7，8，9。在6，7，8，9的上方或下方横放的算筹，以1当5。

我国自有文字记载以来，一直是按十进制记数的，曾被马克思誉为世界上“最妙的发明之一”，比印度使用十进制要早1000多年。正因为是筹算，靠移动算筹进行运算，所以，对程序和方法要求也很严格。在《孙子算经》明确规定“凡算之法，先识其位，一纵十横，百立千僵，千十相望，万百相当”，“满六以上，五在上方，六不积算，五不单张”。有了算筹这样的工具，所有的算术、代数演算都可以按部就班地进行，取得了辉煌的成就，赢得了中华民族素以计算见长的美誉。

元朝末年，算盘逐渐普及，明代数学家程大位，集珠算之

大成，著成《直指算法统宗》一书，使珠算理论系统化，计算方法规范化，易学好用，风行海内，流传极广，加之商业日用之需要，珠算已成为我国近代的主要计算工具，并远传日本、朝鲜、东南亚诸国，至今仍受到世界很多国家的重视和欢迎。

筹算和珠算本质上都属于机械化的数学，解题方法都归结为“术”，用一套程序化的语言和算法来规范计算过程，和现代计算机的思想是一致的。在计算技术高度发展的今天，研究中国古代数学对开发和应用现代计算机技术有非常深远的意义。我国数学家吴文俊教授成功地吸收了中华数学的智慧，创造性地开拓了机器证明的新领域，对世界做出了杰出的贡献，获得了国家科学技术奖。

**读读练练**　　练　习　题

1. 今有木，不知长短，引绳度之，余绳四尺五寸；屈绳量之，不足一尺。问木长几何？

答曰：六尺五寸

2. 今有器中米，不知其数，前人取半，中人三分取一，后人四分取一，余米一斗五升，问本米几何？

答曰：六斗

选自《孙子算经》

# 7 方田求积

**今有田广十五步，从十六步，问为田几何？**

**答曰：一亩**

选自《九章算术》

我国古代对正方形及矩形的田统称为方田，有时也称矩形的田为直田或广田。现在都不用这些名称了，统一叫正方形，长方形或矩形。

这是《九章算术》卷一“方田章”的第一题。章名“方田”，刘徽注称“以御田畴界域”，意思是计算平面图形的周长和面积。题中“广”指宽，“从”（读纵 zòng）指长，即已知矩形的长 16 步，宽 15 步，求面积。

书中“方田术”给出了计算方法和秦汉时期田亩的计量制度。

方田术曰：广从步数相乘得积步。以亩法二百四十步除，即亩数。百亩为一顷。

唐朝著名天文学家李淳风为本题加了详细注解。

“此为篇端，故特举顷、亩二法。余术不复言者，从此可知。一亩之田，广十五步，从而疏之，令为十五行，即每行广一步而从十六步，又横而截之，令为十六行，即每行广一步而从十五步。此即从疏横截之步，各自为方，凡有二百四十步，为一亩之地步数正同。以此言之，即广从相乘得积步，验矣。二百四十步者，亩法也。百亩者，顷法也，故以除之即得。”

《九章算术》是我国古代学子的数学教科书，使用了一千多年。李淳风用注解的形式，在全书的开头就把长方形面积计算的原理、方法说得清清楚楚。即有长方形田一亩，宽是15步，沿纵的方向分为15条，每条宽1步、长16步。再把田横截成16行，每行宽1步，而长为15步。这样纵疏横截之后，把田分成240个正方形（图7-1），每个小正方形的面积是1平方步（可简称为方步）。1亩就是240方步。100亩＝1顷。要特别注意，我国古代把面积单位和长度单位都用“步”，二者的意义是不同的。

本题的解答就是

$$15\times16=240\text{（平方步）}=1\text{（亩）}$$

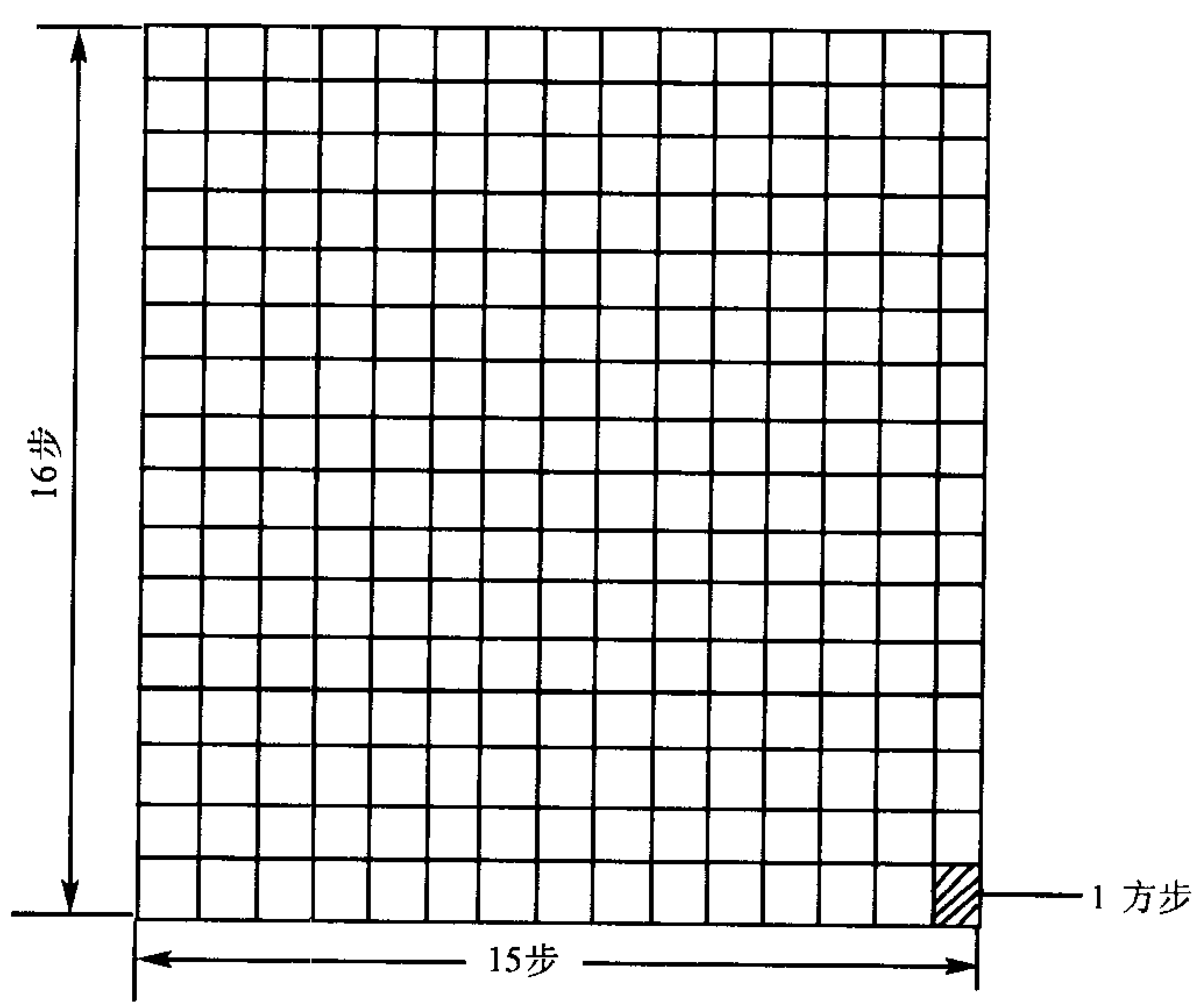



图7-1

## 中算典籍　　《九章算术》

《九章算术》是我国现有传本中最古老的数学经典著作。成书年代争论不一，从刘徽的序言分析，现今传本大约在西汉初（公元前2世纪）张苍（？—公元前152年）、耿寿昌（公元前1世纪）重编的。从内容来看，原书自秦汉五百年来是经多人之手陆续完成的。全书共搜集246个问题，以问题集的形式，有问有答有术，都是与当时的生产生活实际和社会经济环境有一定联系的应用题，分别隶属于方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股等九章，故名曰《九章算术》。其内容有田亩面积计算，土方、粮仓体积计算，工程、赋税、徭役的计算，以及数学上的分数运算、比例、方程、勾股定理、解三角形等。

二千多年来，多次注释，主要有三国刘徽、南宋王朝祖冲之父子、唐朝李淳风、北宋贾宪、南宋杨辉、清李潢等。20世纪以来李俨、钱宝琮率先研究中国传统数学，推动了中国数学史的教育和研究，继之，白尚恕、郭书春、李继闵等都出版了专著，注释《九章》。杭州大学沈康身教授新著《九章算术导读》，今译今释，通俗易懂。加上作者多年的研究成果，可以为我们学习《九章》乃至其他中算典籍扫除障碍。

本书许多例题取材于《九章算术》，就是为弘扬民族文化，宣讲中国古算，让中华数学能薪尽火传，光照后代（图7-2）。

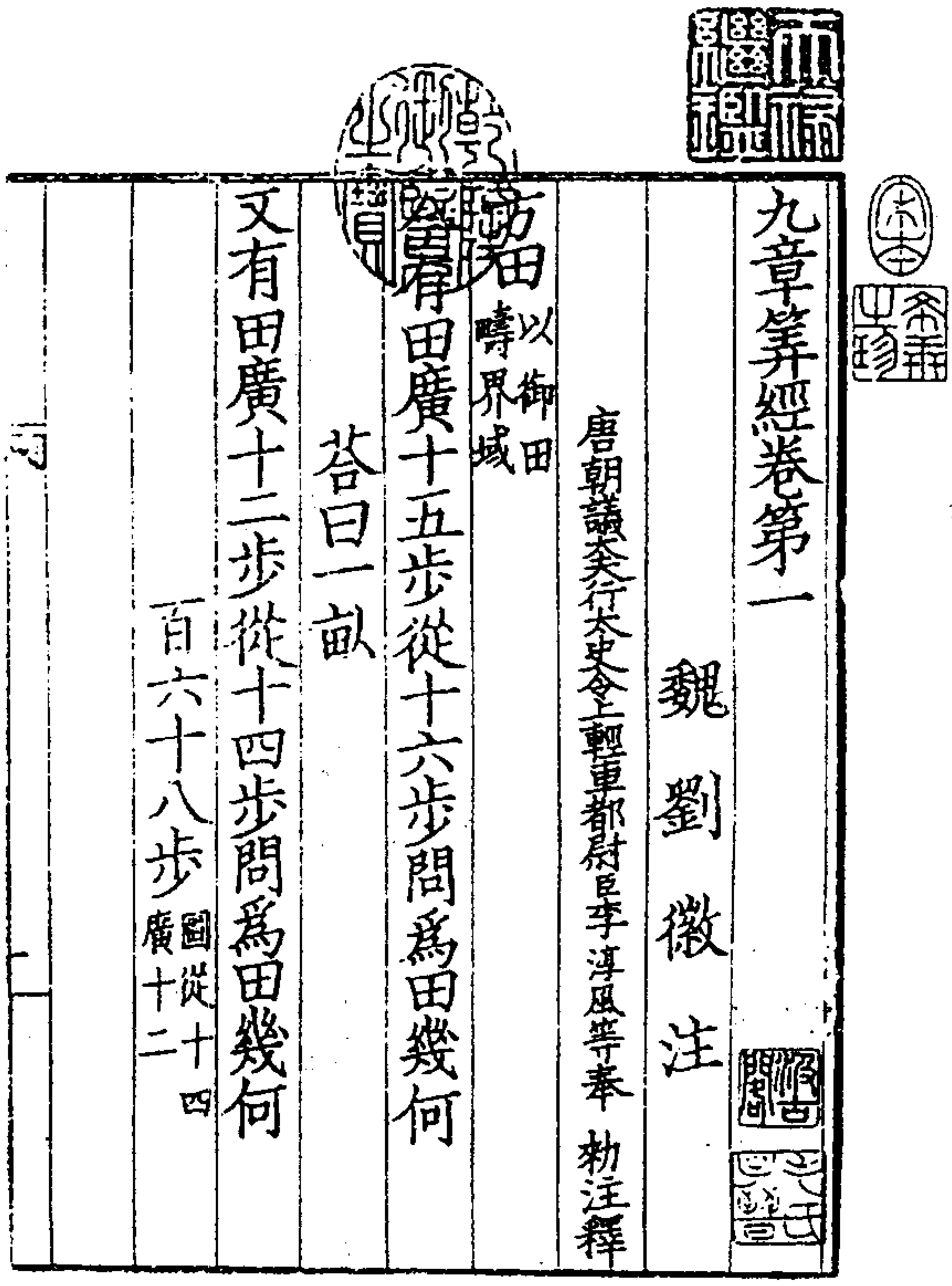

九章筭經卷第一
魏 劉徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 勑注釋
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
百六十八步 圖從十四廣十二

图 7-2

**读读练练**

## 练 习 题

1. 今有田广一里，纵一里，问为田几何？

   答曰：三顷七十五亩

2. 又有田广二里，纵三里，问为田几何？

   答曰：二十二顷五十亩

选自《九章算术》

# 8 凫雁相逢

今有凫起南海，七日至北海；雁起北海，九日至南海。今凫雁俱起，问何日相逢？

答曰：三日十六分日之十五

选自《九章算术》



凫一般指野鸭。本题说，野鸭从南海飞往北海，需要 7 天，雁从北海飞往南海需要 9 天。今二鸟分别从南、北海同时起飞，问多少天后二鸟相逢?

本题虽然简单，在中算书籍里却很典型。它反映了我国数学家处理分数问题时的基本思想方法，这种思想方法叫齐同术。用现代的话说，化异分母为同分母叫同其母，要保持分数值不变，必须齐其分子，齐同以后才可以进行加减运算。为使读者了解古人的解题思想，今引其解法，并略加说明。

术曰：并日数为法，日数相乘为实，实如法而一。

“按此术，置凫七日一至，雁九日一至，齐其至，同其日。定 63 日凫 9 至，雁 7 至。今凫雁俱起而问相逢者，是为共至。并齐以除同，即得相逢日。”

这段话的意思，用一个数表来表示，即

$$\begin{matrix} & \text{凫} & \text{雁} \\ \text{日} & 7 & 9 \\ \text{至} & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow[\text{齐其至}]{\text{同其日}} \begin{pmatrix} 63 & 63 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{并齐至为共至}} \begin{pmatrix} 63 \\ 9+7 \end{pmatrix}$$

即 63 日相逢 16 次，故相逢日数为

$$\frac{63}{7+9}=\frac{63}{16}=3\frac{15}{16}\ (\text{日})$$

刘徽又给出另一解释：凫一日飞全程的 1/7。雁一日飞全程的 1/9，按同其日齐其至的要求，分别记为 9/63 和 7/63。若把南北的距离设想为飞 63 天的话，则凫雁共飞 9 + 7 = 16 次，所以相逢日数是

$$\frac{63}{16}=3\frac{15}{16}\ (\text{日})$$

对于小学生来说，这是一个容易题，常用的方法这里就不介绍了。

## 数学家　刘徽——中国第一代知名数学家




图 8-1

刘徽（图 8-1）是我国魏晋时代的著名数学家。他对数学的巨大贡献和辉煌业绩，史书记载不多，只在《隋书·律历志》上略载："陈留王四年（公元 263 年）刘徽注《九章》。"刘徽的生卒年代不详，据李俨先生考据，"其卒年当在晋代"。从刘曾受封为淄乡男和一些其他史料分析，郭书春先生认为，他可能是山东邹平县人。由于他才华出众，成果丰硕，沈康身先生把他列为中国第一代知名数学家。

刘徽为《九章算术》所写序言和注解是一个宝库，从中可以看出他的数学思想、治学态度和教学方法，即使在今天，也值得学习、钻研。他在《九章》序言里说：

"徽幼习《九章》，长再详览。观阴阳之割裂，总算术之根源，探赜之暇，遂悟其意。是以敢竭顽鲁，采其所见，为

之作注。事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本干者，知发其一端而已。又所析理以辞，解体用图，庶亦约而能周，通而不黩，览之者思过半矣。且算在六艺，古者以宾兴贤能，教习国子。虽曰九数，其能穷纤入微，探测无方。至于，以法相传，亦犹规矩度量可得而共，非特难也。当今好之者寡，故世虽多通才达学，而未必能综于此耳。"

从这里可以看出，他在深入探索奥秘的过程中，还逐渐领悟其中的道理。刘徽在数学方面的成就可以概括为两个方面：一是清理古代数学体系，完善理论基础；二是推陈出新，取得了一批出色的数学成果。《九章算术》和《欧氏几何》在思维方法上有很大的不同。《九章》强调辨证思维，这里"悟"很重要，只有深入的"悟"，才有最后的"觉"。事物之间，虽然枝叶纷繁，必有主干支撑，一定要削枝强干，彼此类推。"析理以辞，解体用图"是刘徽常用的方法，也是中算的特色，学者不仅要明"形数结合"之理，还要明"寓理于算"之理，把形象思维和逻辑思维结合起来。学数学不能满足于"懂了，会了"的要求，还要不断探索研究。现在开设的研究性课题就是为了发展这方面的能力。

**读读练练**　　**练　习　题**

1. 今有田广十二步，从十四步，问为田几何？

答曰：一百六十八步

选自《九章算术》

2. 今有妇人河上荡杯，津吏问曰："杯何以多？"妇人曰："家有客。"津吏曰："客几何？"妇人曰："二人共饭，三人共羹，四人共肉，凡用杯六十五，不知客几何？"

答曰：六十人

选自《孙子算经》

# 9 书生分卷

毛诗春秋周易书　九十四册共无余　毛诗一册三人读

春秋一本四人呼　周易五人读一本　要分每样几多书

就见学生多少数　请君布算莫踌躇

答曰：《毛诗》四十册，《春秋》三十册，《周易》二十四册，学生一百二十名

选自《算法统宗》



《毛诗》、《春秋》和《周易》是儒家的三部经典著作。相传是西汉毛亨、毛苌所著。《春秋》是编年体的春秋史，相传是孔子根据鲁国史官编的《春秋》加以整理而成。《周易》又称《易经》相传是周人所作。

《毛诗》、《春秋》和《周易》共94本，一群学生共读这些书籍，平均3个人合读《毛诗》一册，4个人合读《春秋》一本，5个人合读《周易》一本。问学生有多少人？三书分别有多少册？

**解法1** 算术方法

根据题意，平均每个学生可派读《毛诗》1/3本，《春秋》1/4本，《周易》1/5本。就一个学生来说，他派读的册数是

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{4\times5+3\times5+3\times4}{3\times4\times5}=\frac{47}{60}$$

已知三种书的总册数为94册，故学生数为

$$94\div\frac{47}{60}=94\times\frac{60}{47}=120\text{（人）}$$

《毛诗》：$120\div3=40$册；《春秋》：$120\div4=30$册；《周易》：$120\div5=24$册。

**解法2** 一元一次方程

设学生共有$x$人，则《毛诗》有$\frac{x}{3}$册，《春秋》有$\frac{x}{4}$册，《周易》有$\frac{x}{5}$册，共计

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=94\quad,\quad\frac{47}{60}x=94$$

所以 $x=120$（人）（下略）

## 名人轶事　胡术五、黄澍寻访程大位故居

程大位虽然是徽州人，但这却鲜为人知。我国珠算界的老前辈胡术五一直注意寻访程的故居。

1950 年初，政府为了调整皖南区的中等教育结构，将建国前的一所公立中等职业学校及三所私立中学合并成立皖南区屯溪中学。胡术五、黄澍均调入该校任教。胡是黄的老师，到校后，二人便合作进行一些调研。1953 年通过学生程某终于在屯光乡前园村找到了程大位的故居，程某就是程大位的后裔。当时程氏祠堂尚未破坏，“隶首薪传”的巨匾仍高悬堂上。当时文物保护还没有提上日程。

20 世纪 60 年代初期，珠算教育受到重视，小学普遍开了珠算课，农村初中为适应当时社会经济发展的需要，也开设了珠算课，有关珠算历史文化的研究，也逐步开展起来，余介石、华印椿诸位先生是积极的倡导者。

1964 年四川成都大学教授余介石写信给退休在屯溪的胡术五，希望他调查一下程大位的故居和家族谱系的情况。因为当时有人怀疑程大位的家乡“海阳”是广东的“海阳”，余想查明实据，以正讹传。

余介石先生原籍徽州黟县，与胡术五是同学同乡，都是在东南大学的前身东南高师数学系毕业。抗战时他们合作编写了《复兴中学数学教科书》，合译了《葛、斯、龙三氏微积分》等，在数学教育界享有盛誉。

胡接信后便又邀黄澍等同赴屯溪镇屯光公社调查，找到了程大位的后裔程华先，并在程氏宗祠门前合影留念。查明了程

大位乃是徽州休宁（古称海阳，隶属徽州）屯溪镇前园村人，“海阳”之误，缘由于此。

程氏故居算明代建筑，小商人家，比不上徽州的豪门大贾。虽然程氏大祠堂有一点名气，但也破败不堪，是生产队的仓库。明代巨匾“隶首薪传”被压在仓底，由于年代太久，又没有很好保护，四角已经腐朽，“文革”期间被销毁。1978 年程大位纪念馆修建以后，由黄澍重书了《隶首薪传》的新匾。与此同时，在程梦周先生的支持下，找到了程氏族谱，查明程氏家族的谱系和后裔，也找到了多种版本的《算法统宗》和《算法纂要》。这样，程大位之谜就彻底解开了。国内外许多杂志相继发表了有关程大位生平的纪念文章。黄澍的《程大位卒年资料》和本书作者的《程大位与明代徽商》相继在日本《珠算史研究》杂志上发表。

在安徽省财政厅和珠算协会的关注下，在中国珠算协会朱希安会长和安徽珠算协会许尊普会长直接指导帮助下，由黄山市政府筹建“程大位纪念馆”，1986 年建成，举行了开馆典礼并召开了“纪念程大位逝世 380 周年大会”。国内外众多学者云集于此，开展学术研究和交流活动。现在纪念馆已成为珠算学术交流的中心和爱国主义教育基地。

**读读练练**　　**练　习　题**

方蜡自燃

今有白方一块蜡　白方高厚一尺八
一日对天燃一寸　问燃几年何用法

答曰：16.2 年

提示：蜡块体积 $1.8^3$。

选自《九章比类算法大全》

# 10 以碗知僧

巍巍古寺在山中　不知寺内几多僧
三百六十四只碗　恰合用尽不差争
三人共食一碗饭　四人共尝一碗羹
请问先生能算者　都来寺内几多僧
答曰：六百二十四人，饭碗二百零八只，羹碗一百五十六只

选自《算法统宗》



某山都来寺，不知有多少个和尚，但知道他们三人合分一碗饭，四人合吃一碗汤，共用了 364 只碗，试求和尚的人数。

**解法 1**　算术方法

依题意，每人用$\frac{1}{3}$个饭碗，$\frac{1}{4}$个汤碗，每人共用的碗数是

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

已知碗数是 364，故僧数为

$$364\div\frac{7}{12}=364\times\frac{12}{7}=\frac{4368}{7}=624\text{（人）}$$

饭碗数为 $624\div3=208$ 个，汤碗数为 $624\div4=156$ 个。

**解法 2**　一元一次方程

设和尚总数为 $x$ 人，根据题意，饭碗共有$\frac{x}{3}$个，汤碗共有$\frac{x}{4}$个，且

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=364,\quad x\cdot\frac{7}{12}=364$$

所以　　$x=364\times\frac{12}{7}=624$（人）（下略）

## 数学家　　珠算一代宗师——程大位

程大位（图 9-1），字汝思，号宾渠，生于明嘉靖十二年(1533 年)，系安徽省休宁县屯溪镇前园村人（今黄山市屯溪区前园村），故居至今尚存。去世年份，族谱中并无记载，1966 年胡术五、黄澍再度细访，终于在其家族《先人忌辰簿》中查得为明万历三十四年（1606)。《程氏宗谱》记载，程大位



图 9-1

"精于古篆，善算数"。

程本人小商出身，未应科举之试，也就没有走上仕途，由于"士农工商"，商居末位，《休宁县志》中找不到他的名字。但徽州自古商业发达，徽商遍及全国各地，素有"无徽不成镇"之称。像程大位这样的人，不仅物质生活依靠商业，而且思想和治学方法也都与商业息息相关。据记载，程氏幼年聪敏好学，尤其喜爱数学，常"不惜重资，以购求遗书"，"迂方田、粟米、差分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股诸书，辄厚资购得之"。二十岁左右，利用经商机会，"遨游吴楚，博访文人达士"，遇有"耆通数学者，辄造请问难，孳孳不倦"，接触了许多实际问题，深感学习数学之重要。用他自己的话说，"远而天地之高广，近而山川之浩衍，大而朝廷军国之需，小而民生日用之赀"，无不需要数学。另一方面，他身居农村，田亩丈量，谷仓计算，集市贸易等群众中的实际问题，要他帮助解决，促使他研究计算工具和计算方法，制造丈量田亩的工具——丈量步车，编制算法口诀，便于普通人学习。他特别注

意对儿童的数学教育，把当时数学教育中常用的名题汇集成难题卷，培育读者的学习兴趣。四十岁以后，倦于外游，“归而覃思于率水之上，余二十年”，认真钻研古籍资料，绎其文义，审其成法，遍取各家之长，加上自己的心得体会，终于写成《算法统宗》一书，共十七卷，其后又“删其繁芜，揭其要领”，约简为《算法纂要》四卷，先后在屯溪发行。

**读读练练**

## 练 习 题

盐油相换

一斤半盐换斤油　五万白盐载一舟

斤两内除相易换　须教二色一般筹

答曰：各二万斤

选自《算法统宗》

提示：已知一船装了5万斤盐，1.5斤盐换1斤油，“斤两内除相易换，须教二色一般筹”就是说油盐要互换多少时，二者相等。

# 11 五渠灌水

**今有池，五渠注之。其一渠开之，少半日一满；次，一日一满；次，二日半一满；次，三日一满；次，五日一满。今皆决之，问几何日满池？**

**答曰：七十四分日之十五**

选自《九章算术》均输章

有一池塘，甲、乙、丙、丁、戊五条渠道都与池塘相通。单开甲渠，$\frac{1}{3}$天注满；单开乙渠，1 天注满；单开丙渠，$2\frac{1}{2}$天注满；单开丁渠，3 天注满；单开戊渠，5 天注满。如果五渠同开，多少天把池塘注满？

**解法 1** 算术方法

已知每渠注满一池水需要的天数分别为

$$\frac{1}{3}、1、\frac{5}{2}、3、5$$

每渠独开一天，分别能灌注一个池塘水的

$$3、1、\frac{2}{5}、\frac{1}{3}、\frac{1}{5}$$

若五池齐开，一天能注一池塘水的

$$3+1+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{74}{15}$$

所以，五池齐开，要注满一池水需要的时间为

$$1\div\left(3+1+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=1\div\frac{74}{15}=\frac{15}{74}\text{（日）}$$

**解法 2**　中算古法

本法是基于“凫雁相逢”的齐同思想，将日数、满数列一行，其中“少半日一满”、“二日半一满”分别表示“一日三满”和“五日二满”。

$$\begin{matrix}日数\\满数\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 5 & 3 & 5\\3 & 1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[齐其满]{同其日}\begin{pmatrix}75 & 75 & 75 & 75 & 75\\225 & 75 & 30 & 25 & 15\end{pmatrix}\xrightarrow[满齐]{日同}\begin{pmatrix}75\\370\end{pmatrix}$$

其算法是将第一行的日数相乘得 75 日（同其日），按各渠的灌水速度，算出相应的满数。这样，75 日各渠齐开，共

$$225+75+30+25+15=370\ (满)$$

这就叫“同其日，齐其满”。

注满一池水需

$$\frac{75}{370}=\frac{15}{74}\ (日)$$

实际上，“同其日”若取最小公倍数，整个计算要简单些。

$$\begin{matrix}日数\\满数\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 5 & 3 & 5\\3 & 1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[齐其满]{同其日}\begin{pmatrix}15 & 15 & 15 & 15 & 15\\45 & 15 & 6 & 5 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[满齐]{日同}\begin{pmatrix}15\\74\end{pmatrix}$$

当然，今天解这样的题无需用古人的方法，但“齐同”思想是一个重要的数学思想，应该了解它的来龙去脉；另一方面，也可以看出简单的“通分”法则，在历史上都经过了艰难的历程。

## 古法探源　　更相减损术

“凫雁相逢”、“五渠灌水”解决了通分问题。至于约分问题，实质是如何求分子、分母最大公约数的问题。《九章算术》中介绍了这个方法，叫做“更相减损术”，数学家刘徽对此法

进行了明确的注解和说明，是一个很实用的数学方法，中学生应该掌握它。

**例 1**　今有九十一分之四十九，问约之得几何？

选自《九章算术》方田章

我们用（91，49）表示 91 和 49 的最大公约数。按刘徽所说，分别列出分子、分母，“以少减多，更相减损，求其等也，以等数约之。等数约之，即除也，其所以相减者皆等数之重叠，故以等数约之。”列式如下

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 91 | 49 | |
| 1 | 49 | | |
| | | 42 | 1 |
| | 42 | 7 | |
| 5 | 35 | | |
| | 7 | | |

这里得到的 7 就叫做“等数”，91 和 49 都是这等数的重叠（即倍数），故 7 为其公约数，而 7 和 7 的最大公约数就是 7，（7，7）＝7，所以

（91，49）＝（42，7）＝（7，7）＝7

**例 2**　计算“苏武牧羊”中（1-1）式 10227 和 27795 的最大公约数。

**解**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 10227 | 27759 | |
| | | 20454 | 2 |
| 1 | 7035 | | |
| | 2922 | 7035 | |
| | | 5844 | 2 |
| | 1461 | | |
| | 1461 | 1461 | |

所以（10227，27759）＝（10227，7035）＝（2922，7035）＝（2922，1461）＝（1461，1461）＝1461

可以想像，在秦始皇以前就能进行（1-1）式的约分，这足以表明我国古代高超的数学水平。

**例 3** 一块钢板，长 1 丈 3 尺 5 寸，宽 1 丈零 5 寸，现把它截成同样大小的正方形，要求正方形最大，并且不许剩下钢板，求正方形的边长。

**解** 要求正方形的边长最大，就是求长和宽的最大公约数。用更相减损术得

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 135 | 105 | |
| 1 | 105 | | |
| | | 90 | 3 |
| | 30 | 15 | |
| 1 | 15 | | |
| | 15 | | |

，（135，105）=15

所以，正方形的边长是 1 尺 5 寸。

更相减损术在现代仍有理论意义和实用价值。吴文俊教授说："在我国，求两数最大公约数即等数，用更相减损之术，将两数以小减大累减以得之。如求 24 与 15 的等数，其逐步减损如下表所示：

(24，15) ⟶ (9，15) ⟶ (9，6) ⟶ (3，6) ⟶ (3，3)

每次所得两数与前两数有相同的等数，两数之值逐步减少，因而到有限步后必然获得相同的两数，也即所求的等数，其理由不证自明。

这个寓理于算不证自明的方法，是完全构造性与机械化的，尽可以据此编成程序上机实施"。吴先生的话不仅说明了此法的理论价值，而且指明学习和研究的方向。

## 读读练练　　练　习　题

1. 用更相减损术求（1691772624，4593632611）=？并核对祖冲之的结果（可以用计算器）。

2. 求 198 和 252 的最大公约数。

答案：（198，252）=18

3. 有三根钢丝长度分别为 13 尺 5 寸，24 尺 3 寸，55 尺 8 寸，现要把它截成相等的小段，每根都不许有剩余，截成的小段要最长，问每小段长几寸？一共可截成多少段？请用吴文俊先生讲的方法试一试。

提示：（135，243，558）⟶（135，108，18）⟶（9，18，18）⟶（9，9，9）

# 12 三女归宁

张家三女孝顺　归家探望勤劳
东村大女隔三朝　五日西村女到
小女南乡路远　依然七日一遭
何日齐至饮香醪　请问英贤回报
答曰：一百零五日同到相会

选自《算法统宗》

注：香醪（láo），即酒酿。

本题是最小公倍数的应用题。题意是张家有3个女儿，长女3日回家一次，二女5日回家一次，三女7日回家一次，她们同一天离家，问几日后她们又同时到家相会？

**解**　她们第二次聚会的日期是3、5、7的最小公倍数，用记号[3，5，7]表示，即

$[3, 5, 7]=3\times5\times7=105$（天）

## 古往今来　　最小公倍数

最大公约数和最小公倍数是小学数学的重要内容，经常被用到。这部分知识在世界数学的发展中经过了漫长的道路。《九章算术》中用更相减损术解决了求最大公约数的问题，同时也解决了求最小公倍数问题，这对世界数学是一大贡献。

在中小学求最大公约数和最小公倍数的方法基于算术基本

定理，即任一正整数 $a$ 能唯一地写成

$$a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots p_k^{\alpha_k},\quad \alpha_i>0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ k \quad (12\text{-}1)$$

其中 $p_i$ 是质数 $p_i<p_j$ $(i<j)$，(12-1) 式叫做 $a$ 的标准分解式。

利用标准分解式求二数的最大公约数和最小公倍数，其道理就非常明显了。

**例1** 求（26460，12375）和［26460，12375］。

**解** 因为 $24640=2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7^2$

$12375=3^2\cdot 5^3\cdot 11$

所以 $(26460,\ 12375)=3^2\cdot 5=45$

$[26460,\ 12375]=2^2\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11=7276500$

从中可以看出

$(26460,\ 12375)[26460,\ 12375]=26460\times 12375$

一般地，设 $a$，$b$ 是任意两个正整数，将它们表示成标准分解式

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k},\quad \alpha_i\geqslant 0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$$

$$b=p_1^{\beta_1}\ p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k},\quad \beta_i\geqslant 0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$$

这里 $p_i$ 是质数，$p_i<p_j$ $(i<j)$，那么

$$(a,\ b)=p_1^{\gamma_1}\ p_2^{\gamma_2}\cdots p_k^{\gamma_k},\ [a,\ b]=p_1^{\delta_1}\ p_2^{\delta_2}\cdots p_k^{\delta_k}$$

其中 $\gamma_i=\min(\alpha_i,\beta_i),\delta_i=\max(\alpha_i,\beta_i),i=1,2,\cdots,k$

这里，$\min(\alpha_i,\ \beta_i)$ 和 $\max(\alpha_i,\ \beta_i)$ 分别表示 $\alpha_i$，$\beta_i$ 中最小的和最大的数。

同时我们也得到以下的等式：

$$(a,\ b)\cdot[a,\ b]=ab,\qquad 即\ [a,\ b]=\frac{ab}{(a,\ b)} \qquad (12\text{-}2)$$

(12-2) 式解决了如何从最大公约数求最小公倍数的问题。

一般人认为，算术基本定理彻底解决了公约数和公倍数的问题，其实这只是理论上的结果，质因数的分解问题实际上是很困难的，像闰月问题中的大数据就很难分解。从这个意义上说，更相减损术是一种简单易行的方法。

(12-2) 式可作进一步推广，对于求三个或三个以上整数的最小公倍数，用以下公式进行。

$$[a, b, c] = [[(a, b)], c] = \left[\frac{ab}{(a, b)}, c\right] \tag{12-3}$$

注意：在一般情况下，

$$[a, b, c] \neq \frac{abc}{(a, b, c)}$$

使用时要特别小心。

**读读练练**　　**练　习　题**

求 [9360, 6552] 和 (9360, 6552)。

答案：65520, 936

# 13 环山相会

今有封山周栈三百二十五里，甲、乙、丙三人同绕周栈而行，甲日行一百五十里，乙日行一百二十里，丙日行九十里。问周向几何日会？

答曰：十日六分日之五

选自《张丘建算经》



周栈即栈道，指沿山挑出的环山道路。本题的意思是说：今有环山道路周长325里，甲、乙、丙三人环山而行，甲每日行150里，乙每日行120里，丙每日行90里。如果行走连续不断，问从同一点出发，多少天后再相遇于原出发点？

原书给出的解法非常简单，大家先读读想想道理何在？

**解** 先求甲、乙、丙所行里数的最大公约数（即等数）。

$$(150,\ 120,\ 90) = 30$$

以30作为除数去除栈道周长325即得再相遇的天数。

$$325 \div 30 = 10\frac{25}{30} = 10\frac{5}{6}\ (\text{日})$$

以30去除甲、乙、丙日行里数，即得相遇时所行周数。

甲行 $150 \div 30 = 5$（周）

乙行 $120 \div 30 = 4$（周）

丙行 $90 \div 30 = 3$（周）

## 智慧之光 从“三女归宁”到“环山相会”

我国古代对最小公倍数的研究，不只是为通分运算奠定基础，同时也解决了几个物体作周期运动时，何时重复交会于起点的问题，为天文历法的研究提供了一种有用的方法。我们通过几个有趣的例子，介绍先辈的数学思想，体会方法的实质，对中学的学习也是有好处的。

怎样理解“环山相会”这个方法呢？由于我国古代的算具是竹筹，不可能摆出冗长的计算过程。简单的术文蕴涵着深刻的道理。解题时不要急于进行数和式的变形，而要冷静思索，务求觉悟，一定要“悟”出其中的道理。

“悟”是解数学题的一项基本功，它不光是分析、领会的过程，还是综合、融会已有知识、从已知通向未知的渐变过程。悟得好，自然会出现“山重水复疑无路，柳暗花明又一村”的意境来。这里我们仅做一般性的提示，深刻的道理请大家“悟”一下。

先算一下甲、乙、丙三人环山一周所需天数

$$\frac{325}{150}=\frac{13}{6},\quad \frac{325}{120}=\frac{65}{24},\quad \frac{325}{90}=\frac{65}{18}$$

仿照“三女归宁”的思路，他们第二次相会于原出发点，应是这3个数的最小公倍数，我们仍引用3个整数的最小公倍数记号，记以$\left[\frac{325}{150},\ \frac{325}{120},\ \frac{325}{90}\right]$。

大家知道，最小公倍数原限于整数范围，我国古代数学家很早就把它推广到分数，也就是求一个最小数（不一定是整数）。一般可设想为一个既约分数$\frac{b}{a}$，$(a,\ b)=1$，能同时被上面3个分数整除，即

$$\frac{b}{a}\div\frac{325}{150}=\frac{150b}{325a}=\frac{6b}{13a}=m,\quad m\in Z,\ Z\text{表示整数集} \tag{13-1}$$

因为$(a,\ b)=1$，m是整数，故6能被$a$整除，$b$能被13整除，记以$a|6$，$13|b$，即$a$是6的约数，$b$是13的倍数；同理可得$a|24$，$a|18$，$65|b$。这样$a$应是6，24，18的公约数，$b$应是13，65，65的公倍数，又因为$a$，$b$互质，故

$$a=(6,\ 24,\ 18)=6,\qquad b=[13,\ 65,\ 65]=65$$

$$\frac{b}{a}=\frac{65}{6}=10\frac{5}{6}$$

因为$\frac{65}{6}=\frac{325}{30}=\frac{[325,\ 325,\ 325]}{(150,\ 120,\ 90)}$，这样就得到

$$\left[\frac{325}{150},\ \frac{325}{120},\ \frac{325}{90}\right]=\frac{[325,\ 325,\ 325]}{(150,\ 120,\ 90)}=\frac{325}{30}=\frac{65}{6}=10\ \frac{5}{6}$$

事实上，从（13-1）式也可以“悟”出其中的道理来。至于甲、乙、丙所行周数的算法只是一个比例变换：

$$\text{甲行周数}=\frac{\text{周行相会的日数}}{\text{甲行一周的日数}}=\frac{\dfrac{\text{周栈长}}{\text{等数}}}{\dfrac{\text{周栈长}}{\text{甲一日行里数}}}$$

$$=\frac{\text{甲一日行里数}}{\text{等数}}$$

这样，原题的答案就十分明显了。

一般地，我们得到一个公式：能同时被最简分数$\frac{b}{a}$，$\frac{d}{c}$，$\frac{f}{e}$整除的最小数为

$$\left[\frac{b}{a},\ \frac{d}{c},\ \frac{f}{e}\right]=\frac{[b,\ d,\ f]}{(a,\ c,\ e)} \qquad (13\text{-}2)$$

这是一个有用的公式，是我国古代数学家推广最小公倍数概念的成果。

## 法传四海　　五星同会

求最大公约数和最小公倍数的方法在我国公元 5、6 世纪时已经被掌握使用。日本人民十分注意研究吸取我国的数学成果，并进行认真的分析整理。在 1709 年关孝和著的《括要算法》（用汉文写的）里就有最小公倍数（书中称齐约术）的问题，今取一例，供读者参阅。

**例 1**　今有六个、一十四个、一十五个、二十五个，问齐约之，几何？

答曰：一千零五十

本题就是求 6，14，15，25 的最小公倍数。

**解** 用上一节公式（3），有

$$[6,\ 14,\ 15,\ 25] = [[6,\ 14],\ 15,\ 25]$$

$$= \left[\frac{6\times14}{(6,\ 14)},\ 15,\ 25\right] = [42,\ 15,\ 25]$$

$$= \left[\frac{42\times15}{(42,\ 15)},\ 25\right] = [210,\ 25] = 1050$$

从表面上看，这个方法不如小学生用的方法简捷易懂：

$$[6,\ 14,\ 15,\ 25] = 2\times3\times5^2\times7 = 1050$$

但是，对于像“苏武牧羊”中的大数字，质因数分解就十分困难了。

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 6， | 14， | 15， | 25 |
| 3 | 3， | 7， | 15， | 25 |
| 5 | 1， | 7， | 5， | 25 |
| | 1 | 7 | 1 | 5 |

对于“环山相会”题中求几个分数的“最小公倍数”的问题，在日本也有研究，会田安明（1747—1817）在《算法交会术》（也是用汉文写的）中就有一个五星同会的题目。

**例 2** “周天三百六十五度四分度之一也。今有甲、乙、丙、丁、戊五星，共会于同度，其运旋如环无端。只云五星一日行各不齐。甲星二十八度一十六分度之一十三，乙星一十九度四分度之一，丙星一十三度一十二分度之五，丁星一十一度七分度之一，戊星二度九分度之七。几日而再会于同度乎？问其日数及各遍周天其回次几何？”

“答曰：再会日数 368172 日。甲星回次 29043，乙星回次

19404，丙星回次 13524，丁星回次 11223，戊星回次 2800。”

这是类比于“环山相会”的一个练习题，利用公式(13-2)进行计算。本题计算量很大，要耐着性子用计算器进行。

**解** 依题意，各星日行的度数是

甲星 $28\frac{13}{16}=\frac{461}{16}$度

乙星 $19\frac{1}{4}=\frac{77}{4}$度

丙星 $13\frac{5}{12}=\frac{161}{12}$度

丁星 $11\frac{1}{7}=\frac{78}{7}$度

戊星 $2\frac{7}{9}=\frac{25}{9}$度

各星运旋一周所需的天数（即周期）为

甲星 $365\frac{1}{4}\div\frac{461}{16}=\frac{1461}{4}\times\frac{16}{461}=\frac{1461\times4}{461}$日

乙星 $365\frac{1}{4}\div\frac{77}{4}=\frac{1461}{77}$日

丙星 $365\frac{1}{4}\div\frac{161}{12}=\frac{1461\times3}{161}$日

丁星 $365\frac{1}{4}\div\frac{78}{7}=\frac{1461\times7}{312}$日

戊星 $365\frac{1}{4}\div\frac{25}{9}=\frac{1461\times9}{100}$日

根据“环山相会”的结论，各星再会的日数为

$$\left[\frac{1461\times4}{461},\ \frac{1461}{77},\ \frac{1461\times3}{161},\ \frac{1461\times7}{312},\ \frac{1461\times9}{100}\right]$$

$$=\frac{[1461\times4,\ 1461,\ 1461\times3,\ 1461\times7,\ 1461\times9]}{(461,\ 77,\ 161,\ 312,\ 100)}$$

$$=\frac{1461\times\ [4,\ 1,\ 3,\ 7,\ 9]}{1}=1461\times3\times\ [4,\ 1,\ 1,\ 7,\ 9]$$

$$=1461\times252=368172\text{（日）}$$

各星运行的周数为

甲星

$$368172\div\frac{1461\times4}{461}=1461\times252\times\frac{461}{1461\times4}=29043\text{（次）}$$

用同样的方法可以算出乙、丙、丁、戊各星运行的周数，与答案完全一致，此处从略。

讲这几个例题，不完全是为了有趣、好玩。从更相减损到最大公约数、最小公倍数，是我国古代数学发展的一条轨迹，不仅解决了天文、历法中的问题，而且走出了一条有中国特色的数学发展的路子。老一辈数学家吴文俊、沈康身、李继闵等都非常推崇这个“寓理于算，不证自明”的方法，而且吴文俊先生说：“在我国，则根本没有质数的概念，自然谈不上奠基在质数概念上的数论等分支学科的形成。”

“但是，数学决不能认为是单纯作为推理训练之用的学问，更不能沦为数字游戏之学。数学之所以重要，主要因为能有助于人类认识自然、控制自然，为解决应用中产生的各种问题提供有效手段。就这一点来说，我国古代没有质数的数论比欧几里得的数论不仅毫无逊色，而且要优越得多。”我想只有通过对中算古题的演算、研究，才能慢慢领会吴先生这番话的意义。

**读读练练**　　**练　习　题**

请读者验算一下“五星同会”题。

# 14 三兵巡营

**今有内营七百二十步，中营九百六十步，外营一千二百步。甲、乙、丙三人值夜，甲行内营，乙行中营，丙行外营，俱发南门。甲行九，乙行七，丙行五。问各行几何周，俱到南门？**

**答曰：甲行十二周，乙行七周，丙行四周**

选自《张丘建算经》

由于古文不大好理解，我们循古人的思路，用现代语言加以分析，并把演算结果列成一表，请读者与古法的演算过程相比较，从中可以看出中算构造性与机械化的特色。

**解** 首先说明“甲行九，乙行七，丙行五”是指甲乙丙三人在单位时间内所行路程的比，若取其比值为 240（其他数值如 $k$ 也行），就可以与内、中、外营周长约简，使运算简化。这样，甲、乙、丙在单位时间所行的步数分别为

$$9\times240 \qquad 7\times240 \qquad 5\times240$$

他们各自沿内、中、外三营环绕一周所需的时间为：

甲 $\frac{720}{9\times240}=\frac{1}{3}$（日）

乙 $\frac{960}{7\times240}=\frac{4}{7}$（日）

丙 $\frac{1200}{5\times240}=1$（日）

为了筹算的方便，古代十分注意约简，在计算之初就用 240 把三营周长约简为 3，4，5，列于表左第二栏。

三人再会于南门的天数应是$\frac{1}{3}$，$\frac{4}{7}$，1 的最小公倍数

$$\left[\frac{1}{3},\ \frac{4}{7},\ 1\right]=\frac{[1,\ 4,\ 1]}{(3,\ 7,\ 1)}=\frac{4}{1}=4\ (\text{日})$$

各自的行程分别为：$4\times9=36$，　$4\times7=28$，　$5\times4=20$。（均以 240 步为单位）

以周长 3，4，5 约简得：甲行 12 周，乙行 7 周，丙行 5 周。

我们把这个演算过程列成表 14-1，大家先弄懂这个解法，再看看古代的演草过程，既可以了解其依据，也可以看出中算的特色。

**表 14-1　三兵巡营**

| 各营周长 | | 三人行率 | 再次相会日数 | 相会时行程 | 行周 |
|---|---|---|---|---|---|
| 原长 | 约简 | | | | |
| 内 720 | 3 | 甲 9 | 4 | 36 | 12 |
| 中 960 | 4 | 乙 7 | | 28 | 7 |
| 外 1200 | 5 | 丙 5 | | 20 | 5 |

草曰：置内营七百二十步于左上，中营九百六十步于中，外营一千二百步于下。又各以二百四十约之，内营得三，中营得四，外营得五。别置甲行九于右上，乙行七于右中，丙行五于右下，以求整数。以右位再倍，上得三十六，中得二十八，下得二十。以左上三除右上三十六得十二周，以左中四除右中二十八得七周，以左下五除右下二十得四周，是甲、乙、丙行周数。

## 古为今用　　求 周 期

从“三女归宁”到“环山相会”解决了求几个分数的最小公倍数的问题，这个方法在中学数学学习中还是很有用的。我们通过几个例题来说明它的应用。

**例 1**　求同时被$\frac{8}{9}$和$\frac{10}{21}$整除的既约分数。

**解**
$$\left[\frac{8}{9},\ \frac{10}{21}\right]=\frac{[8,\ 10]}{(9,\ 21)}=\frac{40}{3}$$

**例 2**　有三个工人从砖垛往砌墙的脚手架上运砖，来回一次甲要 15.6 分钟，乙要 16.8 分钟，丙要 18.2 分钟。现在三人同时从砖垛处出发，最少要几分钟三人同时回到砖垛处？

这是我国著名数学家陈景润《初等数论》中的一道题。本来最小公倍数是对整数而言的，他已把这个概念和方法延伸到小数，把 15.6，16.8，18.2 当成整数看待（即把 0.1 分钟当作计量单位 1，则上述三数就是 156、168、182 三个整数了）。

**解法 1**　$[15.6,\ 16.8,\ 18.2]=[[15.6,\ 16.8],\ 18.2]$

$$=\left[\frac{15.6\times16.8}{(15.6,\ 16.8)},\ 18.2\right]=\left[\frac{15.6\times16.8}{1.2},\ 18.2\right]$$
$$=[218.4,\ 18.2]=218.4$$

用更相减损术

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 15.6 | 16.8 | |
| | | 15.6 | 1 |
| 12 | 14.4 | | |
| | 1.2 | 1.2 | |

所以，最少需要 218.4 分钟，即 3 小时 38.4 分钟三人同

时回到砖垛处。

**解法 2** 用“环山相会”的方法，有

$$[15.6,\ 16.8,\ 18.2]=\left[\frac{156}{10},\ \frac{168}{10},\ \frac{182}{10}\right]$$

$$=\frac{[156,\ 168,\ 182]}{(10,\ 10,\ 10)}=\frac{2184}{10}=218.4$$

对高中生来说，公式

$$\left[\frac{b}{a},\frac{d}{c},\frac{f}{e}\right]=\frac{[b,d,f]}{(a,c,e)}$$

是一个有用的公式，它为我们解决了求若干个周期函数的周期提供了一般方法。

**例 3** 求函数

$$f(x)=\sin3x+\sin15x+\sin24x$$

的周期。

**解法 1** $\sin3x$、$\sin15x$、$\sin24x$ 的周期分别是

$T_1=\frac{2\pi}{3}$，$T_2=\frac{2\pi}{15}$，$T_3=\frac{2\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$

$f(x)$ 的周期应是 $T_1$，$T_2$，$T_3$ 的最小公倍数，即

$$[T_1,\ T_2,\ T_3]=\left[\frac{2\pi}{3},\ \frac{2\pi}{15},\ \frac{\pi}{12}\right]=\pi\cdot\frac{[2,\ 2,\ 1]}{(3,\ 15,\ 12)}=\frac{2\pi}{3}$$

所以，函数 $f(x)$ 的周期是 $T=\frac{2\pi}{3}$。

**解法 2** 如果按照例 2 的思路，把三个周期通分

$$T_1=\frac{2\pi}{3}=\frac{40\pi}{60},\quad T_2=\frac{2\pi}{15}=\frac{8\pi}{60},\quad T_3=\frac{\pi}{12}=\frac{5\pi}{60}$$

取$\frac{\pi}{60}$作为 1 个单位，$f(x)$ 的周期应是 [40，8，5]，再乘以$\frac{\pi}{60}$，即

$$T=\frac{\pi}{60}[40,\ 8,\ 5]=\frac{\pi}{60}\times40=\frac{2\pi}{3}$$

**读读练练**

## 练 习 题

求下列函数的周期

1. $y = \sin 15x + \sin 21x + \sin 30x$

2. $y = \sin \frac{14\pi}{3}x - \sin \frac{7\pi}{4}x + \sin \frac{21\pi}{5}x$

答案：$\frac{2}{3}\pi$， $\frac{120}{7}$

# 15 船缸均载

三百六十一只缸　任君分作几船装

不许一船多一只　不许一船少一缸

答曰：一十九只

选自《算法统宗》



今有水缸 361 只，分装在若干个船上，要求每船所装的缸数相等，问共需多少只船？每船装几只缸？

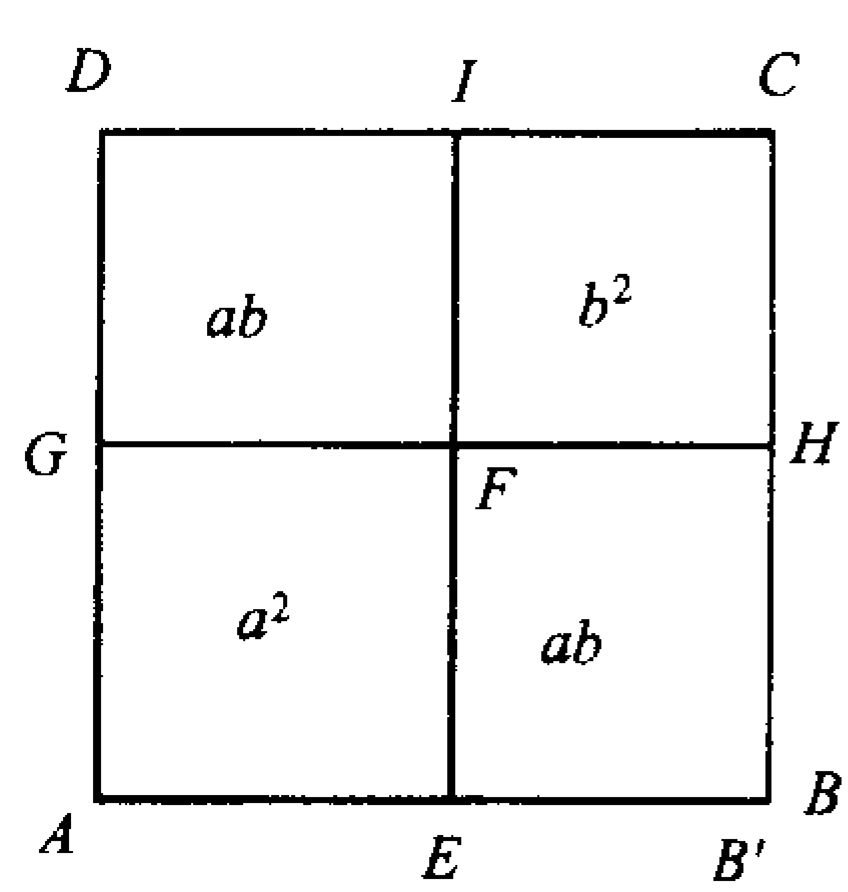
**解** 因为 $361 = 19 \times 19$

所以需要 19 只船，每船装 19 只缸。

说明：一般初中教学中，要求学生能熟记 20 以内的完全平方数，所以本题应能一口报出答案来。

## 古往今来　　怎样开平方

本题实际上是一个整数因式分解题，原书用开平方法来解。现在由于计算器已经普及，开平方的方法也不列入中小学的教学内容了。但是开平方是一种非常重要的运算，其难度远超过四则运算和乘方。在古代《周髀算经》里已给出了若干具体数字的平方根。《九章算术》详细说明了开平方的方法、步骤，尤其可贵的是采用数形结合的方法，根据几何上“出入相补”的原理，“析理以词，解体用图”，显示了中国传统数学的特色。现借用这一题，说一说古人的思想方法和开方原理，可以帮助我们拓宽解决其他问题的思路。




开平方的运算从几何上看，最早起源于解“已知正方形的面积，求边长”这样一个实际问题的需要，也就借助于图形分割把平方根一位一位地开出来。

设正方形 $ABCD$ 面积为 361，先估计 $\sqrt{361}$ 的第一位数字（在《九章算术》里称为“议”）。

因为 $$100<361<400$$

$$10<\sqrt{361}<20$$

它告诉我们 $\sqrt{361}$ 的整数部分是二位数，十位数字是1。

在 $AB$ 上取 $AE=a=10$，作小正方形 $AEFG$，其面积 $S_{AEFG}=100$，从大正方形中挖去小正方形 $AEFG$，余下一个直角的曲尺形 $EBCDGF$，面积为

$$S_{EBCDGF}=S_{ABCD}-S_{AEFG}=361-100=261$$

再根据261来确定 $\sqrt{361}$ 的个位数。

因为 $S_{EBCDGF}=S_{EBHF}+S_{GFID}+S_{FHCI}=2S_{EBHF}+S_{FHCI}$

就是说，要根据 $EB$ 的长度确定个位数 $b$，不光是挖去一个小正方形 $b^2$，还要挖掉两个小长方形 $2ab$。把 $a=10$ 代入

$$2ab+b^2=20b+b^2=(20+b)b$$

利用这个式子估计个位数 $b$，$b$ 取1，2，…，9，从图上看 $b$ 接近8，9，代入上式试算，估得个位数为9，取 $EB'=b=9$，则

$$(20+b)b=29\times 9=261$$

正好 $B'$ 与 $B$ 重合，开方开得尽。

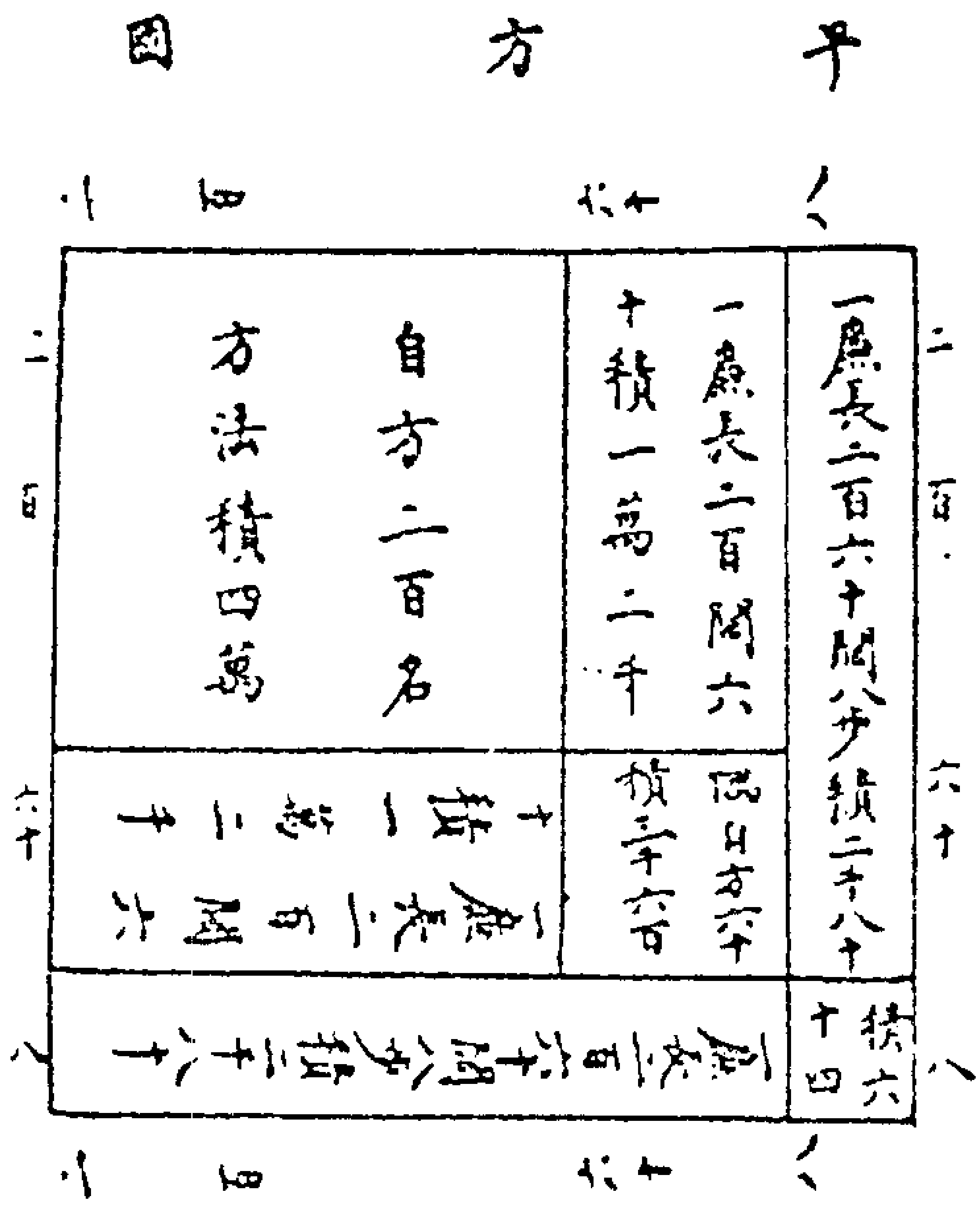
所以 $$\sqrt{361}=19$$

如果 $B'$ 与 $B$ 不重合，还可以继续开下去。刘徽就是用这样的图形来说明开平方的方法的。

《九章算术》的开平方法则是数学史上首次记载的十进制数的开平方法则，刘徽作了几何解释，并给出了有彩色的图解，后来失传，但这种方法一直沿用到后代。下图是《永乐大典》上记载的开方图，刘徽开平方的思想和方法都看得很清楚。

图示表明

$$\sqrt{71824}=268$$




**古为今用** **怎样记 $(a+b)^n$ 的公式**

我国在公元11世纪时就讨论了开高次方的问题，刘徽除了从几何的角度研究了开平方和开立方的方法外，也从代数的角度讨论了开方的问题。从上文可以看出，开平方实际上就是公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

的应用，同样，开立方的代数方法就是公式

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

的具体应用。由于现代计算技术的发展，这方面的内容已不再列入中学的教学内容；但是我国古代数学家为了解决开高次方

的问题，导出了有用的二项展开式的系数表，这对初中同学记忆二项式的平方、立方，乃至四次、五次方的公式是很有帮助的。

杨辉在《详解九章算法》书中载有“开方作法本源图”，并指出此图“出释锁算书，贾宪用此术”，所以有人称此三角形为“贾宪三角形”。

从这个图中，可以建立下面的对应关系：

| | |
|---|---|
| 1 | $(a+b)^0$ |
| 1　1 | $(a+b)^1$ |
| 1　2　1 | $(a+b)^1$ |
| 1　3　3　1 | $(a+b)^3$ |
| 1　4　6　4　1 | $(a+b)^4$ |
| …… | |

在上面的表中，中间的任何一个数字等于它肩膀上的两个数字的和。掌握这个规律，$(a+b)^4$、$(a+b)^5$ 的系数不需记忆就能直接写出来：1，4，6，4，1；1，5，10，10，5，1。

注意：$(a+b)^n$ 的展开式中，字母的排列是这样的：$a$ 按降幂排列，从 $n$ 次逐一降到 0 次；$b$ 按升幂排列，从 0 次逐一升到 $n$ 次；在每一项中 $a$ 和 $b$ 的指数和等于 $n$。

例如：

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

对于 $(a-b)^n$ 的公式，可以利用 $(a+b)^n$ 的公式，只要用 $-b$ 代

替$(a+b)^n$中的$b$就行了。

例如：

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$

$(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

… …

这里，我们只简单地说一说开方历史知识，贾宪三角形在高中还有更多的用处，这里就不再讨论它了。

**读读练练**　　**练　习　题**

今有积二十三万四千五百六十七步，问为方几何？

答曰：$484\frac{311}{968}$步

选自《孙子算经》

试用“船缸均载”的思想方法，定方根的前3位整数。

注：这个方根是无理数，后面的分数是渐近分数。

# 16 圆田求积

1. 今有圆田，周三十步，径十步，问为田几何？

答曰：七十五[方] 步

2. 又有圆田，周一百八十一步，径六十步三分步之一，问为田几何？

答曰：十一亩九十步十二分步之一

术曰：半周半径相乘得积步

选自《九章算术》

这是《九章算术》方田章第三十一、三十二题，虽然是简单的圆形地积的计算题，但对后世影响极大，掀开了我国圆周率研究的序幕。

1. 已知圆的周长 $c=30$ 步，直径 $d=10$ 步，求圆田面积 $A$。

2. 已知圆的周长 $c=181$ 步，直径 $d=60\frac{1}{3}$步，求圆的面积 $A$。

计算法则　　$A=\frac{c}{2}\cdot\frac{d}{2}$

这个公式是正确的。我们熟知$A=\pi r^2=\pi(\frac{d}{2})^2=\frac{c}{2}\cdot\frac{d}{2}$

**解 1**　$A=\frac{1}{2}\times 30\times\frac{1}{2}\times 10=15\times 5=75$[方步]

**解 2** $A=\frac{1}{2}\times181\times\frac{1}{2}\times60\frac{1}{3}=\frac{32761}{12}=2730\frac{1}{12}$

$=2640+90\frac{1}{12}$

按秦汉时代的田亩制度：

1 亩 = 240［方步］，2640［方步］= 11 亩

故圆田面积为十一亩九十步十二分步之一。

从外表看，这是一道很容易的题。但仔细想一想，却觉得有一些问题：首先是条件多余。既然周长已知，直径就可以算出来，为什么还要作为已知条件给出呢？其次给出的周长和直径的关系是“周三径一”，这里的误差太大，算出来的面积就很不准确。那么，这个田的面积究竟应该怎样计算才对呢？问题的核心是圆周率 π 应该怎样求。千百年来，众多数学家对此进行了研究，取得了举世瞩目的成果。这里介绍刘徽在公元 263 年对本题所作的注解，从中可以看出他超越时代的光辉的数学思想。

## 智慧之光　　刘徽割圆

圆的周长与直径的比值（即圆周率 π）是人们生活中几乎天天碰到的数据。世界各大文明古国都十分重视圆周率的研究，可以说“历史上一个国家计算圆周率的准确度是衡量这个国家当时数学水平的一个标志。”我国最古老的天文数学著作《周髀算经》（成书约在公元前 100 年）中就有“周三径一”之说，所以题中的数据就是取 $\pi\approx3$。我国古代数学家刘歆、张衡、皮延宗、祖冲之等都对圆周率的计算作出了杰出的贡献，特别是刘徽的割圆思想和计算方法，有许多值得学习和借鉴的地方。

1. 倍边公式

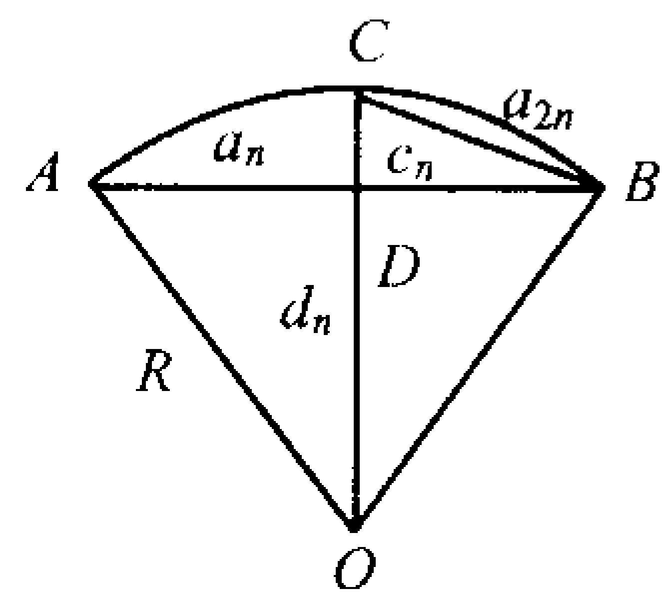



**图 16-1**

刘徽从圆内接正六边形出发，将边数倍增，得到正十二边形，正二十四边形，如此继续下去，则正多边形的面积就愈来愈接近于圆的面积，“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣。”在这里显示了刘徽超越时代的数学思想，在这一思想的指导下，利用极限的方法来解决了圆面积的计算问题，与牛顿—莱布尼茨创立积分法的思想是一致的。

如图，设 $AB = a_n$ 为圆内接正 $n$ 边形的一边，$R$ 为半径，$d_n = OD$ 为边心距，$BC = a_{2n}$ 为圆内接正 $2n$ 边形的一边，$c_n = DC$ 称为 $a_n$ 的余径，又是 $a_{2n}$ 的小勾。

由图 16-1 知

$$a_{2n}{}^2 = (\frac{a_n}{2})^2 + c_n^2 \qquad (16\text{-}1)$$

$$c_n = R - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2}$$

刘徽利用图中大、小直角三角形的关系，依次算出 $d_n$，$c_n$，$a_{2n}{}^2$，…，一直算到 $a_{96}{}^2$，有兴趣的同学，可以利用计算器进行计算（图 16-2）。

由（16-1）得

$$a_{2n}^2 = \frac{1}{4}a_n^2 + (R - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2})^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_n^2} \qquad (16\text{-}2)$$

这就是中学课本中学到的倍边公式。

2. 刘徽不等式

为了求出 π 的近似值，并估算误差的大小，刘徽用很巧妙

的方法，导出了一个有用的不等式——刘徽不等式。

$A_n$ 表示圆内接正 $n$ 边形的面积，$A$ 表示圆的面积，则有

$$A_{2n} < A < A_{2n} + A_{2n} - A_n \tag{16-3}$$

即

$$0 < A - A_{2n} < A_{2n} - A_n \tag{16-4}$$

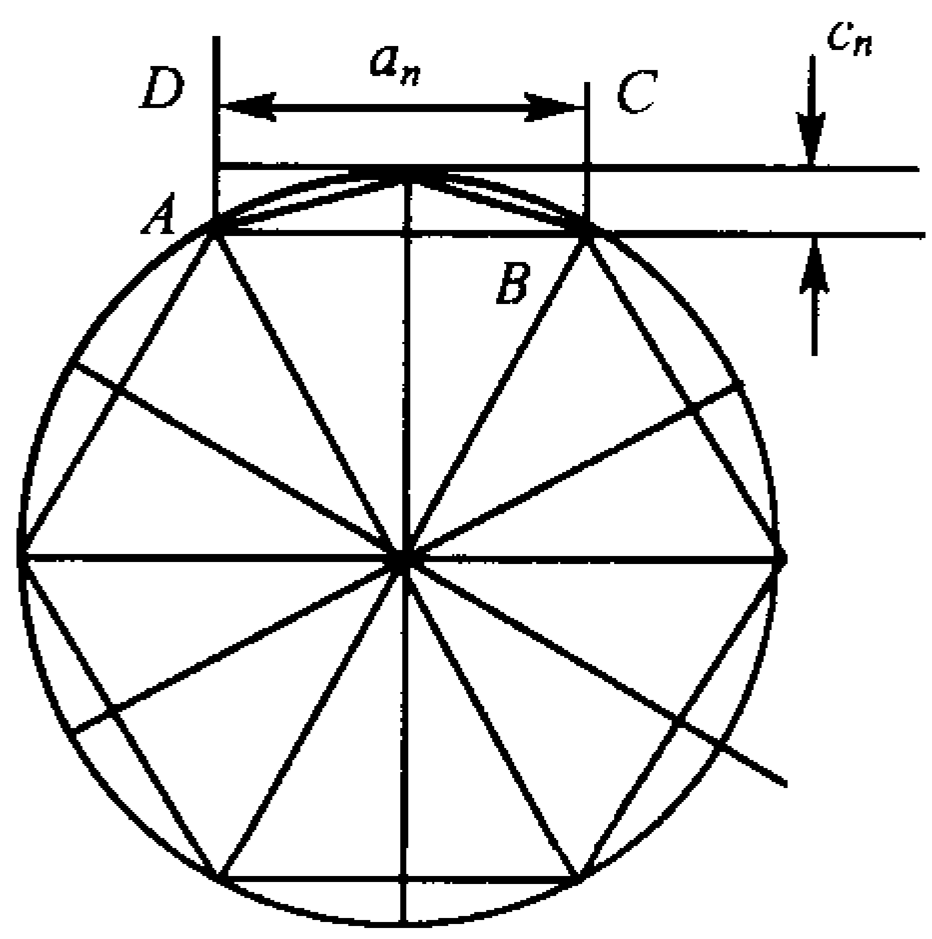



图 16-2

从图 16-2 直观地看，不等式（16-4）是很明显的，因为

$$A_{2n} < A < A_n + nS_{ABCD}$$

而

$$nS_{ABCD} = na_n c_n = 2(A_{2n} - A_n)$$

$$A_{2n} < A < A_n + 2(A_{2n} - A_n)$$

即得(16-3)式：$A_{2n} < A < A_{2n} + (A_{2n} - A_n)$

把它改写成(16-4)式：

$$0 < A - A_{2n} < A_{2n} - A_n$$

当 $n \to \infty$ 时，$A_{2n} - A_n \to 0$，故 $A_{2n} \to A$

刘徽的巧妙变形，令人叹服。特别需要说明的是，刘徽所用的方法与 1500 多年以后，德国数学家外尔斯特拉斯（Weierstrass，1815—1897）提出的“单调有界数列必有极限”定理从思想方法上说是完全一致的。（16-4）式不但给出了计算方法，而且解决了误差估计问题，从而提高了计算的精度，

这在当时是非常了不起的。

3. 正多边形面积公式

$$2A_{2n} = n \times a_n R = \text{周长} \times \text{半径}$$

利用余径三角形，将正 $2n$ 边形“解体”，导出正多边形面积的计算公式，从而引出圆的面积等于“半周与半径相乘”的结论，这是刘徽“析理以辞”、“解体用图”思想的具体应用，是很值得学习的重要方法（图 16-3）。

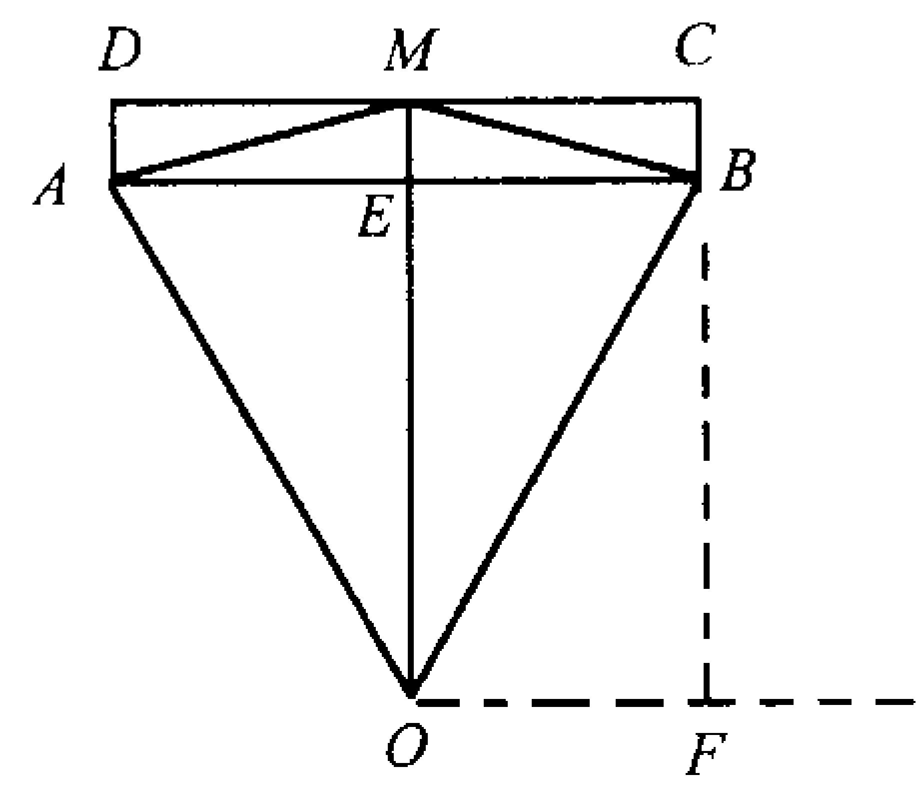



**图 16-3**

如图 16-3，设 $a_n = AB$，是正 $n$ 边形的一边，$a_{2n} = MB$ 是正 $2n$ 边形的一边。

$$S_{\triangle MOB} = \frac{1}{2n} A_{2n} \tag{16-5}$$

因为 $\triangle OEB \cong \triangle OFB$，$\triangle MEB \cong \triangle BCM$

所以 $S_{\triangle MOB} = \frac{1}{2} S_{\text{矩形}MOFC}$

$$= \frac{1}{2} OF \cdot OM = \frac{1}{4} a_n R$$

这样，由(16-5)得

$$A_{2n} = 2nS_{\triangle MOB} = \frac{1}{2} a_n R \tag{16-6}$$

公式（16-6）就解决了用 $a_n$ 计算 $A_{2n}$ 的问题了。

这是刘徽在《九章算术》第 23 题的注解中所用的基本思想和方法，得到了 $\pi=3.141024$ 的结果，其精度为当时世界之冠。即使在今天，圆周率仍然有许多值得研究的地方，可以作为研究性课题，步刘徽的后尘，再做一些深入的研究。

**读读练练**　　　　**练　习　题**

又有圆田，周一百八十一步，径六十步三分步之一，问为田几何?

答曰：十一亩九十步十二分步之一。

选自《九章算术》

请读者依次用 $\pi\approx3$，$\frac{22}{7}$，$\frac{355}{113}$进行验算。

# 17 系羊问索

旷野之地有个桩　桩上系着一腔羊

团团踏破三亩二　试问羊绳几丈长

答曰：绳长八丈

选自《算法统宗》



一条绳索系着一只羊，羊踏坏一块面积为3.2亩的圆形庄稼，试求绳索的长度（取明制1步＝5尺，1亩＝240方步，π约取3）。

**解** 先将圆的面积化为平方步

$$3.2\times240=768\text{（方步）}$$

设圆的半径为 $r$，则面积 $S=\pi r^2=3r^2$，由

$$3r^2=768,\qquad r^2=256$$

所以 $r=16$ 步。将步化为尺，得

$$r=16\times5=80\text{（尺）}$$

## 中算典籍　珠算宝典——《算法统宗》

《算法统宗》是程大位的一部主要著作，他在年轻时外出经商、求教、调研所搜集的资料的基础上，用20年的时间编著而成。全书十七卷，1592年发行。列举算题595个，不仅满足了当时民间日用之需，农商经营之用，而且集珠算之大成，一举改革了筹算占用面积大、运算慢的缺点，完成了筹算到珠算的转变。特别是一整套的运算口诀和算法歌诀，朗朗上口、好读好使，大大推动了中国的数学教育，几乎每一个中国人，甚至文盲都会背“一上一，二上二，三下五去二，……”，都能用算盘进行加减运算，这种普及数学教育的力度可以说空前“绝后”。尽管现在计算器人人会用，但中国古算的特点是“寓理于算，不证自明”，“3＋2＝5”就是“三下五去二”，道理不讲自知，而计算器就不知道它是怎样算的了。所以此书出版以后“风行宇内，迄今盖已有数十余年，海内持筹握算之士，莫不家藏一篇，若业制举者之于四子书、五经义，翕然奉

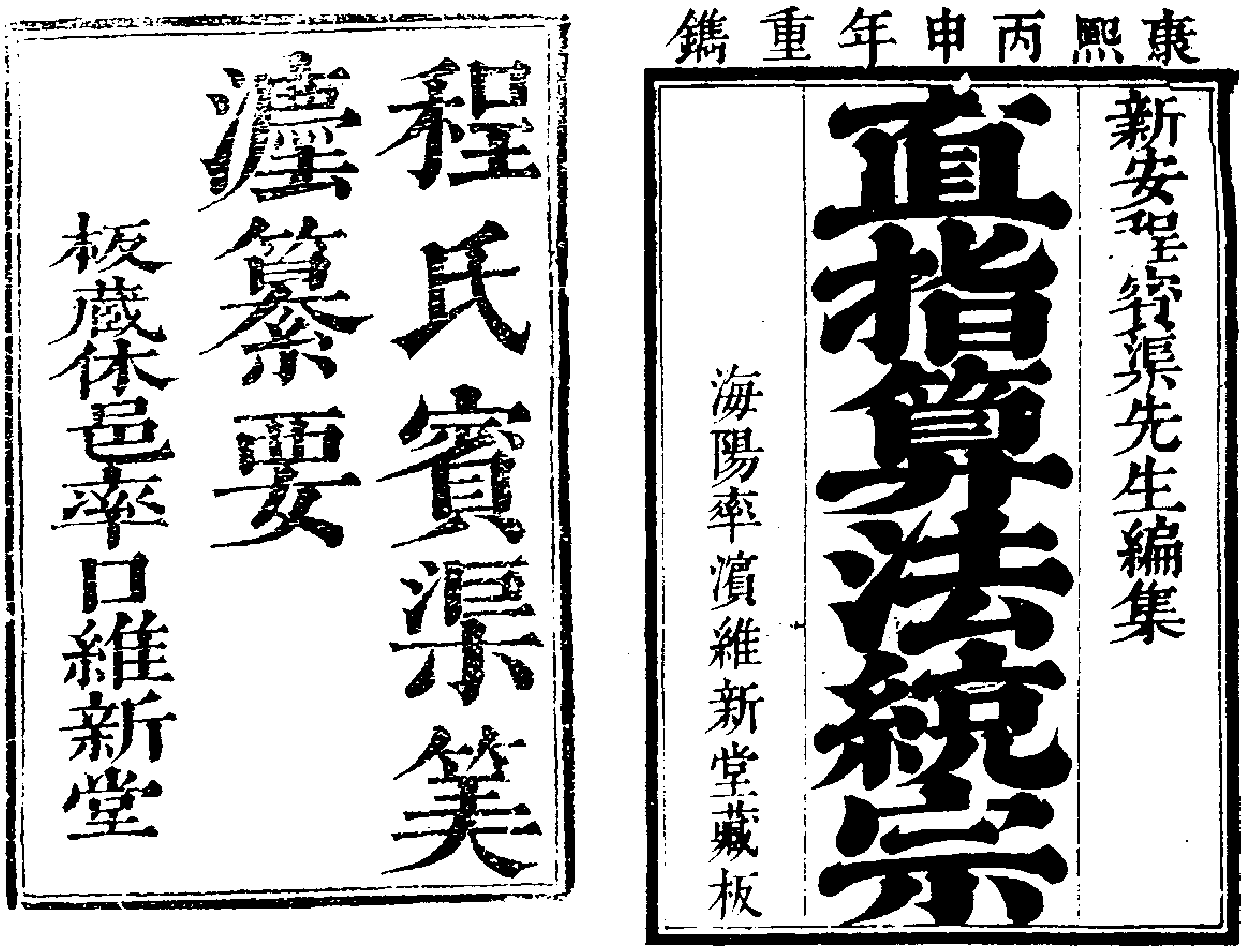



图 17-1

以为宗"。这是康熙五十五年（1716年）的再版序言，它充分说明此书深受人民大众的欢迎，明末毛利重能到中国学习数学，将此书传到日本，直到今天，日本人还十分重视珠算的教育和学习（图 17-1)。

全书基本上按《九章》体例，篇名略有改动，集当时中算之大成，循序渐进，系统性强。许多算法、例题，均以歌诀形式给出，浅显易记，使用方便，乘除是珠算中难学的内容，真正理解了歌诀的意义，都可以打得准确无误，例如，留头乘法则：

下乘之法此为真　起身先将第二因
三四五位乘遍了　再将法首破其身

归除法则：

惟有归除法更奇　将身归了次除之
有归若是无除数　起一还将原数施
或遇本归归不得　撞归之法莫教迟
若人识得中间意　算学虽深尽可知

正如程氏所说，真正理解了法则的意义，归除不仅会打，而且永远不会忘记。

本书选讲了《算法统宗》许多例题，理论上的价值无需多说。中算史专家李俨先生说："在中国古代数学的整个发展过程中，《算法统宗》是一部重要的著作，从流传的长久、广泛和深入讲来，那是任何其他数学著作不能与它相比的。"

**读读练练**　　**练　习　题**

昨日丈量田地回　记得步长整三十
广斜相并五十步　不知几亩几分厘

答曰：二亩

选自《算法统宗》

# 18 推车问里

二人推车忙且苦　半径轮该尺九五

一日推转二万遭　问君里数如何数

答曰：一百三十里

选自《算法统宗》



祖冲之

（公元 429～500 年）

本题是指由二人一推一拉的独轮车，已知车轮半径为一尺九寸五分，一日推转二万周，问日行多少里？

注意：题中取明代的度量制度，1 步 = 5 尺，1 里 = 360 步，题中圆周率 $\pi\approx3$（这是近似地估算，平时计算中不能取 3。）

**解** 已知车轮半径 $r=19.5$ 寸，其周长 $c=2\pi r=117$ 寸

车轮每日转二万周，共行程

$$117\times20000=2340000(\text{寸})$$

按明代计量制度

$$1\text{ 里}=360\text{ 步}=360\times50\text{ 寸}=18000\text{ 寸}$$

故每日行程

$$2340000\div18000=130(\text{里})$$

## 智慧之光　祖冲之的“约率”和“密率”

本题取圆周率 $\pi=3$ 是很不精确的。在世界数学史中对 $\pi$ 的认识和计算经历了一个漫长的过程。我国最早的天文数学著作《周髀算经》（髀 bì 指古代测量日影的标杆）成书大约在公元前 100 年，其中就有“周三径一”的记载。《隋书·历律志》上记载了祖冲之研究圆周率的成果，原文为：“古之九数，圆周率三，圆径率一，其术疏舛（chuǎn，意为错谬）。自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒，各设新率，未臻折衷。宋末，南徐州从事史祖冲之，更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒（nǜ，不足）数为三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间。密率，圆径一百一十三，圆周三百五十五。约率，圆径

七，周二十二。”

这里，包含三个结果：

$3.1415926<\pi<3.1415927$

密率　　$\pi\approx\frac{355}{113}$

约率　　$\pi\approx\frac{22}{7}$

这是祖冲之在刘徽割圆的基础上经过精确计算得到的，其数学思想是先进的，π的密率也是世界上最好的结果，并保持了1000多年，无人能与之相比。英国李约瑟在《中国科学技术史》中称祖冲之的密率“是一个非凡的成就”。

## 古往今来　　连　分　数

祖冲之究竟是怎样得到π的密率和约率的呢？史书上没有记载。众多学者猜测纷纭，有说是“加成分数法”，有说是“连分数法”，有说是“更相减损法”。这里介绍一种比较好接受的方法，即用更相减损法把π化为连分数，从而求出它的渐进分数。这仅是从一个角度来说明“约率”和“密率”的来由，使读者对祖冲之的伟大成就有一个初步的认识。

先用一个简单的例子来说明化连分数的方法。

**例1**　把3.21化成连分数。

**解**　先把整数分离出来，把小数部分用真分数表示，再化为分子是1的繁分数。

$$3.21=3+\frac{21}{100}=3+\frac{1}{\frac{100}{21}}$$

这时，$\frac{100}{21}$是假分数，重复以上步骤，把整数部分分离出来，

小数部分用真分数表示，再化为分子是 1 的繁分数，如此继续下去

$$3.21=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{16}{21}}=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cfrac{21}{16}}}$$

$$=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{5}{16}}}=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5}}}}$$

| | 左 | 右 | |
|---|---|---|---|
| | 100 | 21 | |
| 4 | 84 | | |
| | | 16 | 1 |
| | 16 | 5 | |
| 3 | 15 | | |
| | 1 | | |

上面的运算过程可以用更相减损法很快地写出来。将上式中 21/100 的分母、分子分列于左、右两列，取倒数并化为带分数得 $4\frac{16}{21}$，整数部分 4 在左外侧。余数 16 是新的分子，21 是新的分母。如此继续下去，直到最后 1 个分子是 1，分母是 5，终止于$\frac{1}{5}$。

由于连分数的上述形式既占篇幅，又容易出错，通常简记成以下的形式：

$$3.21=3+\frac{1}{4}{}_{+}\frac{1}{1}{}_{+}\frac{1}{3}{}_{+}\frac{1}{5}$$

注意：从$\frac{1}{4}$开始，后面的加号一定要与分母在同一行上。实际运算中，可以根据更相减损法的竖式，直接写成连分数的简记形式。

逐次舍去末尾的分数，可获得 3.21 的一系列的近似分数，这种近似分数称为渐进分数。其道理非常明显，很容易想像得到。舍去像“宝塔”一样的最下层的分母中的“小分数”，得

到的显然是原数的不足或过剩近似值。

下面写出 3.21 的不足和过剩近似值：

| | |
|---|---|
| $3^{(-)}$ | $3<3.21$ |
| $3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}^{(+)}$ | $3<3.21<3+\frac{1}{4}$ |
| $3+\frac{1}{4+}\frac{1}{1}=3+\frac{1}{4+1}=\frac{16}{5}^{(-)}$ | $\frac{16}{5}<3.21$ |
| $3+\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3}=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}=3+\frac{4}{19}=\frac{61}{19}^{(+)}$ | $\frac{16}{5}<3.21<\frac{61}{19}$ |
| $3+\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{5}=\frac{321}{100}$ | |

所以 3.21 的渐进分数是：$3^{(-)}$，$\frac{7}{3}^{(+)}$，$\frac{16}{5}^{(-)}$，$\frac{61}{19}^{(+)}$，$\frac{321}{100}$。

我们知道，有理数都可以表示成一个既约分数，用上述方法就能写成连分数形式。对于无理数，可以通过它的有限小数的近似值化为连分数（近似的），也可以借助于数学变换，求得它的连分数的表达形式。

**例 2** 把$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$化为连分数。

**解**

$$2<\sqrt{5}<3,1<\sqrt{5}-1<2$$

$$\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1$$

用以下的方法进行变形：先把分子化为 1，再把分母的整数部分分离出来，对小数部分重复上述步骤，穿插进行分子、

分母有理化运算。

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1}{\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}}=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}=\frac{1}{1+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}}=\cdots$$

一直化下去，得到一个无限的连分数

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots$$

它的渐进分数是 1，1/2，2/3，3/5，5/8，8/13，…

读者可能会问，一个实数为什么要写成这样复杂的连分数形式呢？仔细想想就会明白，它表示：

（1）一个实数可以用连分数的形式表示出来（有限的或无限的）；

（2）连分数的表示式中，“宝塔”式的分数线的层数越多，精度就越高；

（3）逐次截去末尾的分数，可以得到一组用分数来逼近实数的渐进分数。事实上，把一个实数展开成连分数

$$a=a_0+\frac{1}{a_1+\dfrac{1}{a_2+\cdots}}$$

即

$$a=a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots$$

截去尾数，得到的渐进分数依次记为

$$\frac{q_0}{p_0},\frac{q_1}{p_1},\frac{q_2}{p_2},\cdots,\frac{q_n}{p_n}\cdots$$

理论上可以证明，这些分数具有以下性质：

（1）都是既约分数；

（2）下标是偶数的近似分数是不足近似值，下标是奇数的是过剩近似值；

（3）这些渐进分数都是最佳近似分数。就是说，对所有分母不大于 $p_k$ 的分数中，$\frac{q_k}{p_k}$ 与 $a$ 的误差 $\left|a-\frac{q_k}{p_k}\right|$ 为最小。

在实际问题中有许多题目需要用分数来逼近一个实数。像“苏武牧羊”题中，已经指出，祖冲之在制定《大明历》时，实测地球绕太阳一周和月亮绕地球一周的天数分别是 $365\frac{9589}{39491}$ 和 $\frac{116321}{3939}$，一年的月数应是

$$\frac{365\frac{9589}{39491}}{\frac{116321}{3939}}=12\frac{1691772624}{4593632611}$$

根据这个数据，一年设 12 个月时间少了，设 13 个月又太多了，究竟如何设置闰月才合理呢？

我们用更相减损法求出最大公约数，并展开成连分数，用渐进分数来表示闰月设置的规律。

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 4593632611 | 1691772624 | |
| 2 | 3383545248 | 1210087363 | 1 |
| | 1210087363 | 481685261 | |
| 2 | 963370522 | 246716841 | 1 |
| | 246716841 | 234968420 | |
| 1 | 234968420 | 223219999 | 19 |
| | 11748421 | 11748421 | |

所以，(4593632611，1691772624)＝11748421

把上述分数约分后展开成连分数

$$\frac{1691772624}{4593632611}=\frac{144}{391}=\frac{1}{2}\,\frac{}{+}\,\frac{1}{1}\,\frac{}{+}\,\frac{1}{2}\,\frac{}{+}\,\frac{1}{1}\,\frac{}{+}\,\frac{1}{1}\,\frac{}{+}\,\frac{1}{19}$$

它们的渐进分数是

$$0^{(-)},\ \frac{1}{2}^{(+)},\ \frac{1}{3}^{(-)},\ \frac{3}{8}^{(+)},\ \frac{4}{11}^{(-)},\ \frac{7}{19}^{(+)},\ \frac{144}{391}$$

所以，一般地说，闰月的设置是 3 年闰 1，8 年闰 3，11 年闰 4，19 年闰 7，按祖冲之的结果，391 年应置 144 个闰月，并且他说："十九岁有七闰，闰数为多，经二百年辄差一日，节闰既移，则应改法。"从这里就可以看出其中的道理了。

下面我们在祖冲之求得 $\pi$ 盈朒二数的基础上，利用连分数的知识来推算 $\pi$ 的约率和密率。

取 $\pi\approx3.14159265=3\ \frac{14159265}{100000000}=3\ \frac{2831853}{20000000}$，用更相减损法展开成连分数

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 20000000 | 2831853 | |
| 7 | 19822971 | 2655435 | 15 |
| | 177029 | 176418 | |
| 1 | 176418 | 175968 | 288 |
| | 611 | 450 | |

所以，$3.14159265=3+\frac{1}{7+}\,\frac{1}{15+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{288+}\,\frac{450}{611}$

逐次去掉尾数，得到一系列渐进分数

$$3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \cdots$$

祖冲之取 22/7 为约率，355/113 为密率，对古代精通分数运算的中国人来说，不仅提供了方便，而且密率已达到 6 位小数的精度，创造了惊人的世界记录，并且保持了 1000 多年，体现了中国人用分数逼近实数的科学思想和异乎寻常的计算功底。

读读练练

## 练 习 题

1. 现测地球绕太阳一周是 365.2422 天，月亮绕地球一周是 29.5306 天，以此数据为基础，排出闰月的安排规律，并与祖冲之的结果加以比较。

2. 本节例 2 中$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的渐进分数是

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \cdots$$

写出各分子所组成的数列，并找出相邻三项的递推关系。

答案：$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

# 19 僧分馒头

一百馒头一百僧　大和三个更无争

小和三人分一个　大和小和得几丁

答曰：大和尚二十五人，分得馒头七十五个；

小和尚七十五人，分得馒头二十五个

选自《算法统宗》



这是我国家喻户晓的一道名题，通常作为小学训练思维的心算题。

今有大小和尚共100人，分食100个馒头。已知大和尚1人分3个，小和尚3人分1个，问大小和尚各有多少人？他们分别分到多少个馒头？

**解法1** 中算古法

| | | |
|---|---|---|
| | 大和尚1人 | 分馒头3个 |
| | 小和尚3人 | 分馒头1个 |
| 合计 | 和尚4人 | 馒头4个 |

从给定的条件看来，4个和尚分4个馒头，它们的结构比例是：大和∶小和＝1∶3，并且，大和分的馒头数∶小和分的馒头数＝3∶1。现在已知100个和尚分100个馒头，按此比例，很容易求得

大和尚

$$100\div(3+1)=25\text{（人）}$$

小和尚

$$100\div4\times3=75\text{（人）}$$

大和尚分馒头

$$25\times3=75\text{（个）}$$

小和尚分馒头

$$75\div3=25\text{（个）}$$

**解法2** 列方程解应用题

设大和尚有 $x$ 人，小和尚有 $y$ 人，则

$$\begin{cases}x+y=100\\3x+\dfrac{1}{3}y=100\end{cases}$$

消去 $y$ 求得

$$x=25\ (人),\ y=75\ (人)\qquad (下略)$$

这个题目用比例的方法来计算十分简单。我国古代对比和比例作了深入的研究，取得了丰富的成果，我们将通过一些例题作简单的介绍。

## 古往今来 “生金蛋的母鸡”——“今有术”简介

“今有术”是我国古代数学的一种常用的方法，其实质就是比例运算。

大家知道，在远古时代，人们为了生活，必须进行交换。最初的交换形式是“物物交换”，这种最原始的交换形式，却是世界各国数学发展史上一个重要的生长点，从它出发繁衍、派生出许多不寻常的结果来。

物物交换应该有一个“标准”，就是说两物之间应该有一个相对稳定的比率关系，使交换物品的数量可以扩大或缩小相同的倍数，而这个比率不变。我们的祖先就从这个简朴的思想出发，概括出比率的基本概念和基本性质，解决了生产、生活中的众多问题。

下面我们简单地介绍一下今有术的历史背景和发展轨迹，重在领会思想，不必深究一些难懂的词语。

由于成本和劳务的不等，在物物交换中，逐渐形成了二者之间一定的比例关系。按照这种约定的比例关系，由已知物品的数量，就可以算出被换物品的数量。所以，在《九章算术》里，专列“粟米”一章，论述“以御交质变易”的方法，即讲

解物物交换和按比例折算的基本方法。在全章的开头给出了“粟米之法”，定下了交换的比率。

粟米之法：

| | |
|---|---|
| 粟率五十 | 粝米三十 |
| 粺米二十七 | 凿米二十四 |
| …… | …… |

这实质上是秦汉时代的粮食换算表。粟米是我国北方主要的粮食作物，去壳后，俗称“小米”，也常叫“谷类”。表中“粝米”，就是人们所说的“糙米”；把糙米臼舂去10%的糠秕，得到的米叫“粺米”，又叫“粗米”（即“九折米”）；把糙米臼舂去20%的糠秕，得到的米叫“凿米”，又叫“精米”；…按照这个统一的交换比率，就可以解决许多粮食交换的问题。

**例1** 今有粟一斗，欲为粝米，问得几何？

答曰：为粝米六升。

术曰：以粟求粝米，三之，五而一。

选自《九章算术》

本题的意思是根据粟米之法所列的比率，问一斗谷子能换多少糙米？

由粟米之法知

$$谷子:糙米=50:30$$

设所求数为 $x$，则

$$50:30=1:x \quad 即 \quad 5:3=1:x \qquad (19\text{-}1)$$

$$x=\frac{1\times 3}{5}=\frac{3}{5}（斗）=6（升）$$

古人把这种计算方法叫做“今有术”，四项比例中的各项均有专门名词，即

$$\begin{matrix}\text{所有率} & : & \text{所求率} & = & \text{所有数} & : & \text{所求数}\\ (\text{粟率}50) & & (\text{糙米}30) & & (\text{今有粟}1\text{斗}) & & (\text{所求数}x)\end{matrix}$$

根据比例的性质：两内项之积等于两外项之积，有

$$\text{所有率}\times\text{所求数}=\text{所求率}\times\text{所有数}$$

所以

$$\text{所求数}=\frac{\text{所有数}\times\text{所求率}}{\text{所有率}} \tag{19-2}$$

术文曰："以所有数乘所求率为实，以所有率为法，实如法而一。"（19-2）式就是这个关系的解析表达式。

"今有术"实际上就是初中所学的正比例关系 $y=kx$，通过给定所有率和所求率的数据，确定比例系数 $k$，再由所有数求所求数。

**例 2** 今有粟四斗五升，欲为凿米，问得几何？

答曰：为凿米二斗一升五分升之三。

选自《九章算术》

本题的意思是：今有谷子 4 斗 5 升，问能换得精米多少升？

**解** 由粟米之法知道，"粟率五十，凿米二十四"，设所求数 $x$，则由

$$\text{所有率}:\text{所求率}=\text{所有数}:\text{所求数}$$

$$50:24=45:x$$

所以
$$x=\frac{45\times24}{50}=21\frac{3}{5}\ (\text{升})$$

"今有术"虽然简单，但刘徽却十分看重这个方法，认为它是一种解题的通法，许多问题可以以此为基础，转化为比例问题用"今有术"求解。

**例 3** 今有出钱一万三千五百，买竹二千三百五十个，问

个几何?

答曰：一个，五钱四十七分钱之三十五。

选自《九章算术》

今有13500钱，买竹2350根，问每根竹子多少钱?

这是一个简单的用除法求物品单价的问题，刘徽也把它归结为今有术之类，认为："按今有之义，一枚为所有数，出钱为所求率，而今有之，即得所求数。"

这样，求单价的问题，也表示成四项比例的问题，即

$$2350:13500=1:x$$

$$\text{所以 } x=\frac{1\times 13500}{2350}=5\frac{35}{47}\text{（钱）}$$

这也体现了刘徽的化归思想和当今的"以法统题，多题一法"的思想是一致的。

**例4** 今有兔先行一百步，犬追之二百五十步，不及三十步止，问犬不止，复行几何步及之?

答曰：一百七步七分步之一。

选自《九章算术》

今有兔子先行100步，狗起跑追及，狗跑了250步，发现还距离兔子30步，问狗再跑多少步就可以追上兔子?

**解法1** 依题意作如下示意图（19-1）。

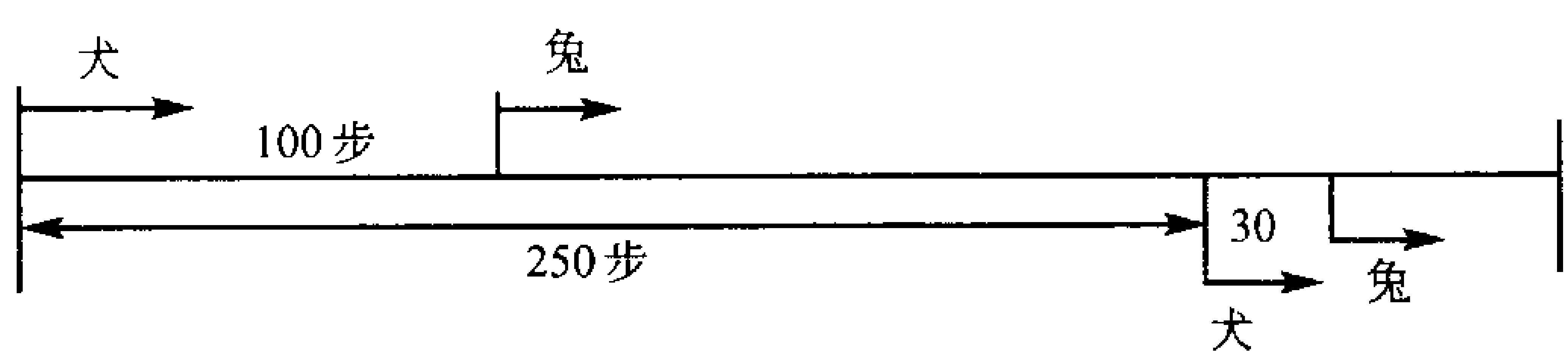



**图19-1**

兔子先行100步，狗起跑追及，狗行250步时，狗兔还相距30步，就是说狗行250步可以追及兔子先行的70步。由于

狗、兔都是匀速运动，即在相同的时间里狗、兔行走的距离之比是不变的。

设狗再行 $x$ 步就可以追上兔子，显然有

$$\frac{x}{30}=\frac{250}{70}$$

所以 $$x=\frac{30\times 25}{7}=107\frac{1}{7}\ （步）$$

即狗再行 $107\frac{1}{7}$ 步就可以追上兔子。

**解法 2** 如图19-1，若从起点算起，也可以设狗再行 $x$ 步，即狗行 $250+x$ 步，就追上兔子了，则有

$$(250+x):100=250:70$$

计算的结果是完全一样的。

本题的关键是利用狗追兔子的“追及量”的正比例关系简捷地求出了答案，说明我国古代数学家善于用比例的方法来解决一些实际问题。

**例 5** 今有善行者行一百步，不善行者行六十步。今不善行者先行一百步，善行者追之，问几何步及之？

答曰：二百五十步。

选自《九章算术》

本题的意思是：甲、乙二人均作匀速运动，且速度不同，已知甲每行 100 步乙行 60 步，现在乙先行 100 步，甲追及之，问甲要行多少步才能追上乙？

这是一个简单的行程问题，涉及距离、速度和时间三者之间的关系，属于一元一次方程的应用题，刘徽用算术的方法，不通过时间的变量，把它直接转化为简单四项比例问题，体现了“今有术”应用的广泛性。

**解** 在单位时间内，甲比乙要快

$$v_{甲} - v_{乙} = 100 - 60 = 40 \text{（步）}$$

$$\frac{v_{甲}}{v_{甲} - v_{乙}} = \frac{100}{40} = \frac{5}{2} \tag{19-3}$$

（19-3）式左边是甲的速度比上甲、乙的速度差。它的几何意义是：甲每走 100 步便靠近乙 40 步，也就是甲每走 5 步便靠近乙 2 步，那么，甲要走多少步才能靠近乙 100 步呢？这样这个题目便化为典型的四项比例问题了。5 为所求率，2 为所有率，100 为所有数，$x$ 为所求数，于是

$$2:5 = 100:x$$

所以
$$x = \frac{5}{2} \times 100 = 250 \text{（步）}$$

比例问题与生产、生活密切相关，广泛用于交换、课税、工程、运输诸方面，是《九章算术》重点讲述的内容之一，并应用于解决几何、测量、面积、体积的计算问题。这样系统地介绍各类比例算法是当时的世界之最。明代李之藻译《同文算指》时用一、二、三、四率代替了“今有术”中各比例量的专名，徐光启译《几何原本》时，正式提出“比例”一词，并沿用至今。

印度在公元 5、6 世纪时出现了三率法，相当于我国“今有术”中的所有率、所有数和所求率。此法在 16 世纪文艺复兴时传入欧洲，深受那里商人们的欢迎，被誉为“黄金法则”。由于印度数学曾在多方面受到中国古算的影响，所以，有些数学史家认为，比例的源头在中国，并可能经印度、阿拉伯传入欧洲。

我们知道，正比例关系 $y = kx$ 是数量关系中最简单的线性关系。我们的先辈把它作为研究各种算法的一条主线贯穿在《九章算术》的粟米、衰分、均输、方程、盈不足术之中。许

多复杂的算式，借助于“率”的概念，最终用“今有术”来解。用现代的眼光来看，就是“化曲为直”的思想，所以有人说，“今有术”是我国数学史中“生金蛋的母鸡”。

**读读练练**　　　　练　习　题

1. 今有出钱二千三百七十，买布九匹二丈七尺，欲匹率之，问匹几何?

答曰：一匹，$244\frac{124}{129}$钱

选自《九章算术》

提示：一匹＝40尺。

2. 今有人盗马乘去，已行三十七里，马主乃觉，追之一百四十五里，不及二十三里而还，今复还追之，问几何里及之?

答曰：$238\frac{3}{14}$里。

术曰：置不及里数，以马主追里数乘之，为实。以不及里数减已行里数，余为法，实如法而一。

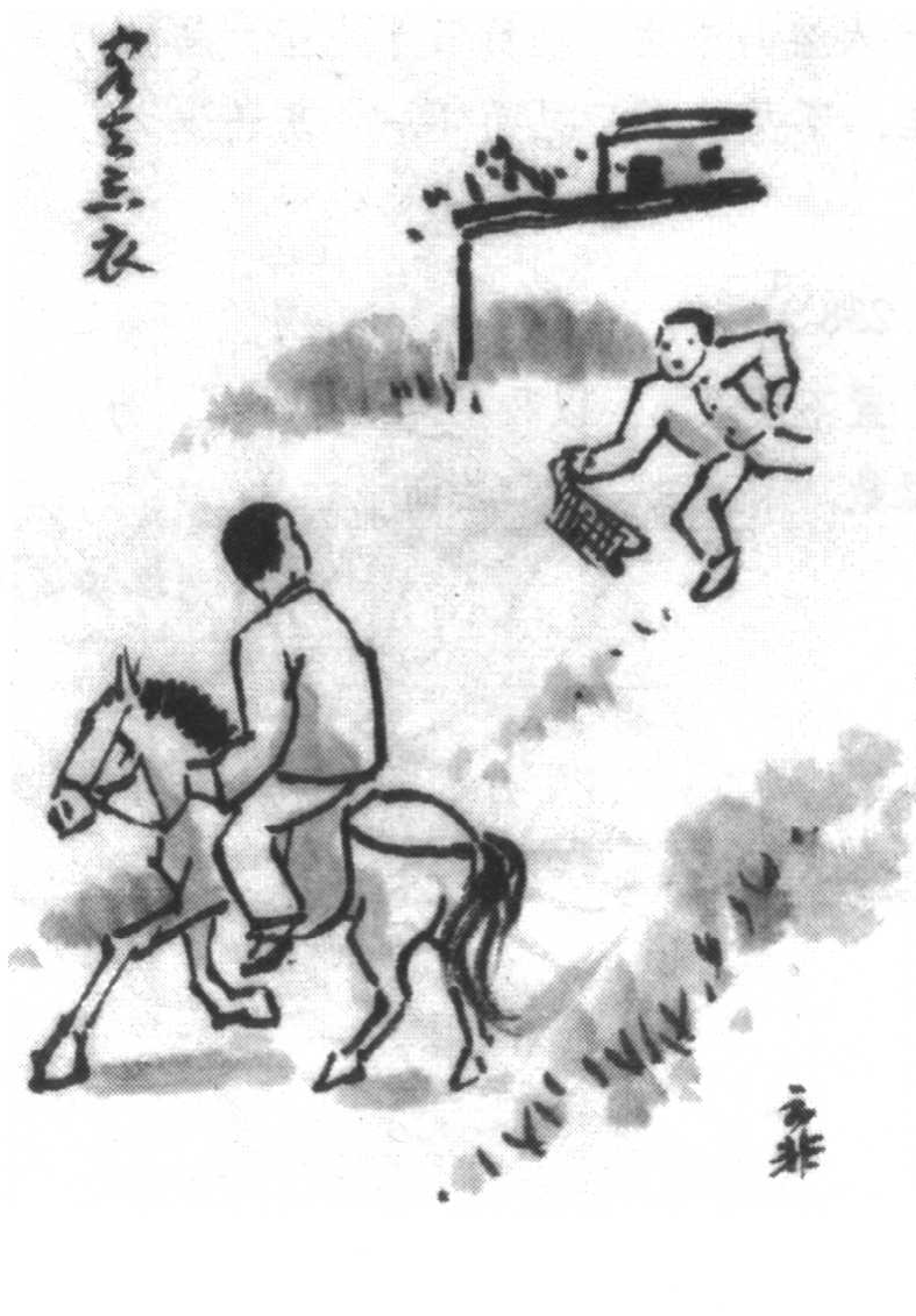
选自《张丘建算经》

# 20 客去忘衣

今有客马日行三百里，客去忘持衣，日已三分之一，主人乃觉。持衣追及与之而还，至家，视日四分之三。问主人马不休，日行几何？

答曰：七百八十里

选自《九章算术》



已知客人骑的马日行 300 里，客人走后 1/3 日，主人发觉客人有衣服忘记带走，于是立刻骑马追上，把衣服还给客人以后立即骑原来的马还家，到家时正好是 3/4 日。问主人马速日行多少里？

注意：在我国古代白天的开始是卯初（即现今 5 时整），白天的终了是酉初（即现今 17 时整），因此从卯初至酉初 12 小时为 1 日。

**解法 1**　算术法

这是一个简单的追及问题，时间以“日”为单位。

主人追到客人又回到原地，往返所走的时间是

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}\ (\text{日})$$

主人追到客人单程所用的时间为

$$\frac{1}{2}\times\frac{5}{12}=\frac{5}{24}\ (\text{日})$$

客人被主人追到时行走的时间是

$$\frac{5}{24}+\frac{1}{3}=\frac{13}{24}\ (\text{日})$$

这时客人行走的距离为

$$300\times\frac{13}{24}=162\frac{1}{2}\ (\text{里})$$

所以，主人的马速为

$$162\frac{1}{2}\div\frac{5}{24}=780\ (\text{里/日})$$

我国古代把“今有术”称为“通术”。对有些题目，通过数量关系的分析转化为比例问题来求解。

**解法 2**　比例法

在上题数据的基础上，已求得主客相遇时，主行时间（单

程）$\frac{5}{24}$，客行时间$\frac{13}{24}$，客人马速 300 里/日，显然，在这一段距离上有

$$主行时间\times主人马速=客行时间\times客人马速$$

即

$$\frac{5}{24}\times主人马速=\frac{13}{24}\times 300$$

$$主人马速=\frac{13\times 100}{5}=780\ （里/日）$$

**解法 3**　列方程解应用题

设主人马速为 $x$ 里/日，依据解法 2 的分析，列出以下方程

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)x=\left(\frac{5}{24}+\frac{1}{3}\right)\times 300$$

$$\frac{5x}{24}=162\frac{1}{2}$$

解得

$$x=780\ （里/日）$$

## 古往今来　　反比例和连比例

随着今有术应用面的扩大，它一直延伸到反比例、连比例、复比例和分配比例。

在初中我们学过正比例函数，它的解析式是 $y=kx$，表明变量 $x$ 变化时 $y$ 也随之变化，并且 $y$ 与 $x$ 的比值等于常量 $k$。同时我们还学习了反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k$ 是不为 0 的常数），它实质表示 $y$ 和$\frac{1}{x}$成正比例关系，也就是说这两个变量的积是一个常量 $xy=k$。今有术基本上解决了正比例关系的一类问

题。反比例关系在古代也有研究，《张丘建算经》里就有一个很有名的算题。

**例1** 今有七百人造浮桥，九日成。今增五百人，问日几何？

答曰：五日四分日之一。

选自《张丘建算经》

这是一个很简单而又很典型的例题。造桥的工作总量是一个常数，它等于 $700\times9=6300$，造桥人数 $y$ 和施工日数 $x$ 成反比，即 $xy=6300$。

**解** 设所求日数为 $x$ 日，则

$$x\ (700+500)\ =9\times700$$

所以 $$x=\frac{9\times700}{1200}=5\frac{1}{4}\ (\text{日})$$

**例2** 六十四人八日开河一千六百积尺。今添夫三十六人，令开十二日，问开几积尺？

答曰：三千七百五十尺

杨辉《续古摘奇算法》

杨辉的算式是

$$\text{所求积尺}=\frac{(64+36)_{\text{人}}\times12_{\text{日}}\times1600_{\text{积尺}}}{64_{\text{人}}\times8_{\text{日}}}$$

他的基本思路还是立足于今有术，将1人1天的工作量作为一个工作日，即常说的“一个工”。这样，$64\times8=512$ 个工，开河1600积尺，今有 $(64+36)\times12=1200$ 个工，能开河多少积尺？这里“所有率”为 $64\times8=512$，“所求率”为 $(64+36)\times12=1200$，均为两项之积，杨辉称这个方法为“重互换”。

今有术的进一步推广，涉及多个量的关系，刘徽把它叫做

“重今有术”，就是现在的连比例和复比例问题。

**例 3** 今有络丝一斤为练丝一十二两，练丝一斤为青丝一斤十二铢。今有青丝一斤，问本络丝几何？

答曰：一斤四两一十六铢三十三分铢之一十六。

选自《九章算术》

这是一道由生丝练为熟丝再染为青丝的生产过程中的原料、产品之间的比例关系。刘徽在注解中两次应用“今有术”处理其中的比例关系，故为“重今有”。在计算过程中要注意化为相同的单位后再求其值。

1 斤 = 16 两 = 384 铢　　(1 两 = 24 铢)

本题是说，今有生丝 1 斤可练为熟丝 12 两，给出了一个比例关系：

$$生丝:熟丝 = 16:12 = 4:3$$

练丝 1 斤可染为青丝 1 斤 12 铢，这里又给出了一个比例关系：

$$熟丝:青丝 = 384:396 = 32:33$$

如果从这两个式子导出“生丝:熟丝:青丝”的连比关系，本题就可以运用今有术来求解了。

事实上，这已是一个很简单的问题了，因为已知

$$生丝:熟丝 = a:b，熟丝:青丝 = c:d$$

显然有　　$生丝:熟丝:青丝 = ac:bc:bd$

刘徽就利用这个“齐同”的思想，调整上两个式子的比值使它套成连比。

$$生丝:熟丝 = 4:3 = 128:96，熟丝:青丝 = 32:33 = 96:99$$

故　　$生丝:熟丝:青丝 = 128:96:99$

经过这样处理以后，刘徽说“三率悉通矣”。在这个连比

式中，已知青丝 1 斤，求生丝 $x$，用今有术，有

$$x:1=128:99,\quad x=\frac{128\times1}{99}=1\text{ 斤 }4\text{ 两 }16\frac{16}{33}\text{铢}$$

这一道题，刘徽的注解十分精彩，对其解法和思想说得很透彻。今录原文，供参阅。

“又置络丝一斤铢数，与青丝一斤十二两约之，络得四，练得三，此其相与之率。又置练丝一斤铢数，与青丝一斤十二铢约之，练得三十二，青得三十三，亦其相与之率。齐其青丝、络丝，同其二练，络得一百二十八，青得九十九，练得九十六，即三率悉通矣。今有青丝一斤为所有数，络丝一百二十八为所求率，青丝九十九为所有率。为率之意犹此，但不先约诸率耳。凡率错互不通者，皆积齐同用之。放此，虽四五转不异也。”

**例 4** 菽三升易小麦二升，小麦一升五合，易油麻八合，油麻一升二合，易粳米一升八合。今将菽十四石四斗，欲易油麻。又将小麦二十一石六斗，欲易粳米，几何？

答曰：油麻五石一斗二升。粳米一十七石二斗八升。

选自《数书九章》第十八卷

菽就是大豆。已知大豆 $a_1=3$ 升，可换小麦 $b_1=2$ 升；小麦 $a_2=1.5$ 升，可换油麻 $b_2=0.8$ 升；油麻 $a_3=1.2$ 升，可换粳米 $b_3=1.8$ 升。现给出大豆 $m=1440$ 升，能换多少油麻？又给出小麦 $n=2160$ 升，能换多少粳米？

本题用连比解比较简单。

因为　豆:麦 $=3:2=45:30$　麦:油麻 $=1.5:0.8=30:16$

所以　　豆:麦:油麻 $=45:30:16$

设 $m$ 升大豆能换 $x$ 升油麻，则

$$45:16=m:x$$

$$x=\frac{16\times m}{45}=\frac{16\times 1440}{45}=512\ (升)$$

仿此

麦∶油麻＝1.5∶0.8＝45∶24　油麻∶粳米＝1.2∶1.8＝24∶36

所以　　　　麦∶油麻∶粳米＝45∶24∶36

设 $n$ 升小麦能换 $y$ 升粳米，则

$$45:36=n:y$$

$$y=\frac{36\times n}{45}=\frac{36\times 2160}{45}=1728\ (升)$$

## 读读练练　　练　习　题

1.　　将军追校

小校先行约五十　将军马上后驱驰
行程三百二十步　欠行十步不能追
休暂住　莫停迟　更追几步得相齐
此般妙法人稀会　算得无错敬重伊

答曰：80 步

选自《九章算法比类大全》

2. 某公司生产三种型号的轿车，产量分别为 1200 辆，6000 辆和 2000 辆，为检验该公司的产品质量，现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验，这三种型号的轿车依次应抽取________，________，________辆。

选自《2003 年高考数学试卷》(新教材)

答案：6，30，10

提示：将总体分成几部分，按各部分所占的比进行抽样，叫做分层抽样。

# 21 互易推本

**问出度牒，差人营运，每三道，易盐十三袋；盐二袋，易布八十四尺；布一十五尺，易绢三匹半；绢六匹，易银七两二钱，今趁到银九千一百七十二两八钱，欲知元关度牒道数几何？**

**答曰：度牒一百八十道**

选自《数书九章》第十七卷

这是秦九韶在《数书九章》第九章市物类中提出的一个复比例例题，他设计了一个直观的图式，使这类复比例问题的计算程序化、简单化、易学、好用，显示了中国古代数学的又一特色。

度牒本是中国古代政府发给僧人的身份证明。因为在封建时代出家做和尚（叫度僧）要经过政府审批，审查合格后发给度牒，就可以免除赋税和劳役。题中的度牒相当于现在的定额支票。

题中给出了度牒、盐、布、绢、银的互换比例，今知银书为 91728 钱，推求原度牒的张数。

原题的解法很简单，作者画出了一张雁翅状的图，并指出："以多一事相乘为实，少一事相乘为法，除之。"

上五数相乘为被除数

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 3 | 度牒 |
| | | | 2 | 13 | 盐 |
| | | 15 | 84 | | 布 |
| | 6 | 3.5 | | | 绢 |
| 91728 | 72 | | | | 银 |

下四数相乘为除数

$$度牒张数=\frac{3\times2\times15\times6\times91728}{13\times84\times3.5\times72}=180(道)$$

为了导出上述公式，分别用 $a_1, a_2, \cdots, a_5, ; b_1, b_2, b_3, b_4$ 表示图中各数，用 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 表示相应的比例第四项，按照下表，由下向上看：

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | | | | $a_1$ | 度牒 |
| $x_2$ | | | $a_2$ | $b_1$ | 盐 |
| $x_3$ | | $a_3$ | $b_2$ | | 布 |
| $x_4$ | $a_4$ | $b_3$ | | | 绢 |
| $a_5$ | $b_4$ | | | | 银 |

因为 $a_4:b_4=x_4:a_5$，所以 $x_4=\frac{a_4\times a_5}{b_4}$

同样

$$a_3:b_3=x_3:x_4，所以\ x_3=\frac{a_3\times x_4}{b_3}=\frac{a_3\times a_4\times a_5}{b_3\times b_4}$$

如此推算下去，就得到

$$x_1=\frac{a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5}{b_1\times b_2\times b_3\times b_4}$$

秦九韶设计的这张雁翅图，无论从算理、算法上说都是十分简单明了的。

本题也可以用上节例 3 中连比例的方法，求出度牒、盐、布、绢和银的连比关系，即

$$度牒:盐 = a_1:b_1 = a_1a_2:a_2b_1$$

$$盐:布 = a_2:b_2 = a_2b_1:b_1b_2$$

所以 $$度牒:盐:布 = a_1a_2:a_2b_1:b_1b_2$$

同理

$$布:绢 = a_3:b_3 = a_3b_1b_2:b_1b_2b_3$$

$$盐:布:绢 = a_2a_3b_1:a_3b_1b_2:b_1b_2b_3$$

又因为

$$度牒:盐 = a_1a_2:a_2b_1 = a_1a_2a_3:a_2a_3b_1$$

$$度牒:盐:布:绢 = a_1a_2a_3:a_2a_3b_1:a_3b_1b_2:b_1b_2b_3$$

仿照这样的方法，容易得到

$$度牒:盐:布:绢:银 = a_1a_2a_3a_4:a_2a_3a_4b_1:a_3a_4b_1b_2:a_4b_1b_2b_3:b_1b_2b_3b_4$$

根据上述比例关系，已知银 $a_5$ 钱，求度牒的张数 $x_1$，就可以用今有术

$$a_1a_2a_3a_4:b_1b_2b_3b_4 = x_1:a_5$$

所以 $$x_1 = \frac{a_1a_2a_3a_4a_5}{b_1b_2b_3b_4}$$

**读读练练**

## 练　习　题

1. 今有不善行者先行一十里，善行者追之一百里，先至不善行者二十里，问善行者几何里及之？

答曰：$33\frac{1}{3}$（里）

2. 今有五人分五钱，令上二人所得与下三人等，问各得几何？

答曰：甲得 $1\frac{2}{6}$ 钱，乙得 $1\frac{1}{6}$ 钱，丙得 1 钱，丁得 $\frac{5}{6}$ 钱，戊得 $\frac{4}{6}$ 钱

选自《九章算术》

# 22 诵课倍增

有个学生心性巧　一部孟子三日了

每日增添整一倍*　问君每日读多少

答曰：头一日读四千九百五十五字，第二日读九千九百一十字，第三日读一万九千八百二十字

选自《算法统宗》

*注：《算法统宗》原文为“每日增添一倍多”，宜改为“整一倍”。



一部《孟子》共 34685 字，有个学生 3 日读完，所读字数逐日增加一倍，问这个学生每日读多少字？

**解法 1** 算术方法

如果把学生第一日所读的字数为 1 份，则第 2、3 日所读的字数分别为 2 份、4 份，合起来 3 天共读 7 份，故每份的数值为

$$34685 \div 7 = 4955 \text{（字）}$$

故三日所读的字数依次为：4955、9910、19820。

**解法 2** 一元一次方程

设学生第一日读 $x$ 字，则第 2、3 日分别读 $2x$、$4x$ 字，因为《孟子》的字数 34685 作为已知数，所以

$$x + 2x + 4x = 34685，即 7x = 34685$$

所以 $$x = 4955 \text{（下略）}$$

本题也可以用等比数列来做，其实质是一样的。

## 数学家　吴敬与《九章算法比类大全》

吴敬字信民（约 1385～1450 年），浙江仁和（今杭州市）人。担任过浙江布政使司的幕府，掌管全省田赋和税收工作。工作实践的需要和江浙经济的繁荣，使他接触了许多数学问题并加以研究、解决，积累了丰富的解题经验，成为当时钱塘一带著名的数学家。《九章算法比类大全》是他在此基础上花十年的时间写成的一部重要的数学著作。

大家知道，中国传统数学经过宋元时期的高度发展以后，在明代却进入了低潮。大批经典著作因无人研究而亡佚。另一方面，由于明代商业经济的发展，应用数学十分活跃，数学著作应该显示出商业数学的特点，吴敬的《大全》就是这个时期

商业数学著作的杰出代表。

《九章算法比类大全》共有十卷，基本上按《九章》体例，他认为一切应用问题都是从《九章》中的相关问题演变而来的。所以他十分推崇《九章》，把他编写的所有的应用题按照《九章》的名义编成九卷。每卷分古问、比类、诗词三类算题，前面的问题取自古算书，称之为“古问”，其后是结合当时实际的应用题，称之为“比类”，再加上古典诗词体的趣味算题，共有 332 个。由于他有意识地提倡古典数学，对当时的数学研究产生了一定的影响。比类题中有利息计算，商品交换，合伙经营等商业算题，反映出数学在商业资本发展过程中的作用。诗歌体的算题极富教育意义，《算法统宗》的许多算题都选自此书。



# 23 三等赔偿

八马九牛十四羊　赶在村南牧草场

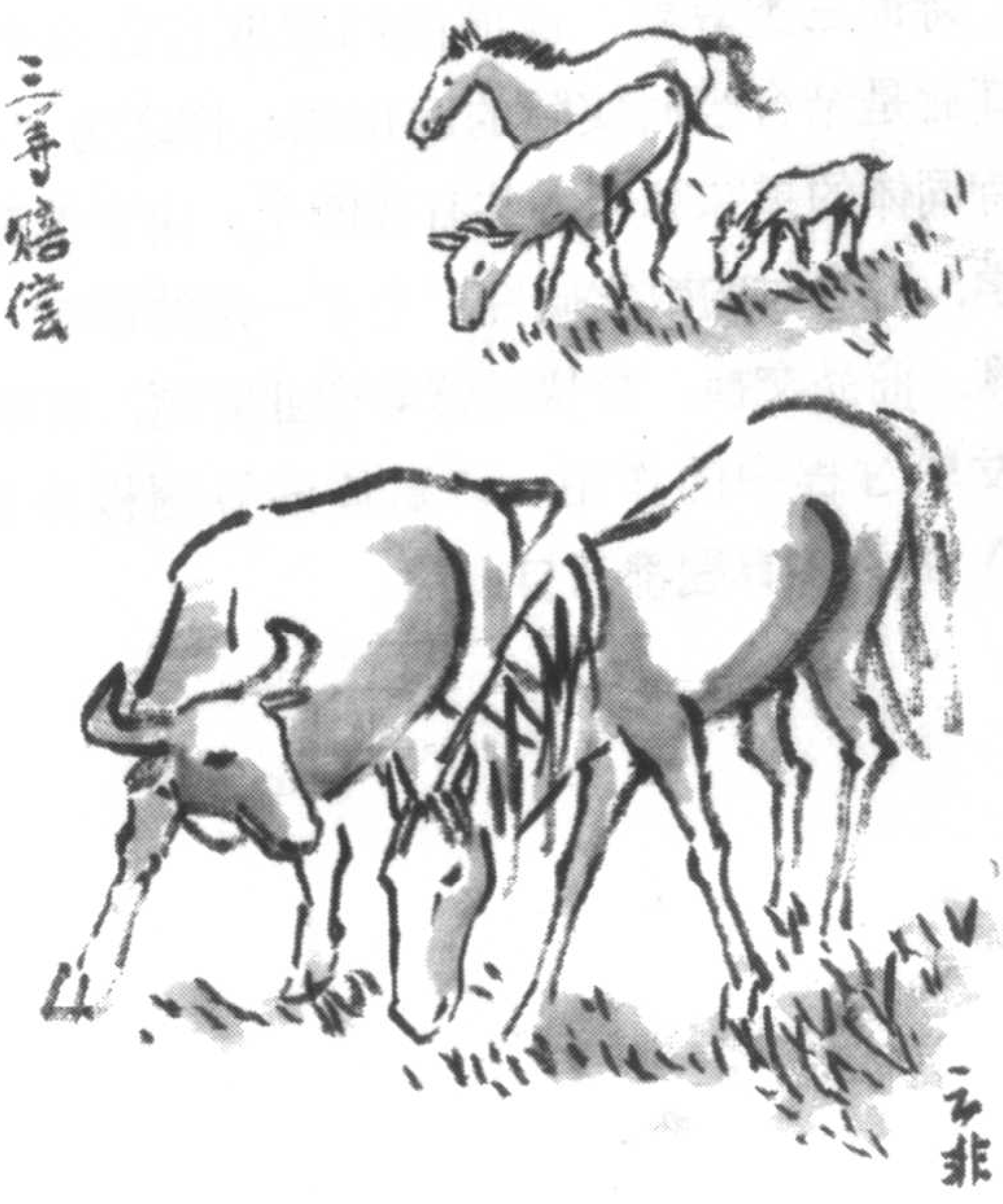
吃了人家一段谷　议定赔他六石粮

牛一只　比二羊　四牛二马可赔偿

若还算得无差错　姓氏超群到处扬

答曰：马八共赔三石，牛九共赔一石六斗八升七合五勺，羊十四共赔一石三斗一升二合五勺

选自《算法统宗》



## 23 ◎ 三等赔偿

有 8 匹马、9 条牛和 14 只羊，在草场放牧，误吃了一片稻谷，拟定赔偿 6 石粮食，赔偿的比例是牛与羊之比是 1:2，牛与马之比是 4:2。试计算马、牛、羊的主人各应赔多少粮食。

**解法 1** 中算古法

这是一个连比问题，由题意知羊、牛、马的赔偿比例是 1:2:4，利用衰分法，“归一”为羊的赔偿数，即以“一羊”的赔偿数为“一衰”，折算马、牛、羊的总衰。

因为 羊:牛:马 = 1:2:4

所以，14 羊:9 牛:8 马 = 14:18:32，合并为总衰

$$14+18+32=60$$

每只羊应赔偿

$$6\div 64=0.09375 \text{（石）}$$

以此为法遍乘各衰得

羊主赔偿

$$0.09375\times 14=1.3125 \text{（石）}$$

牛主赔偿

$$0.09375\times 18=1.6875 \text{（石）}$$

马主赔偿

$$0.09375\times 32=3 \text{（石）}$$

**解法 2** 一元一次方程

设一只羊应赔偿稻谷 $x$ 石，则一条牛应赔 $2x$ 石，一匹马应赔 $4x$ 石，依题意得

$$32x+8x+14x=6$$

$64x=6$，所以 $x=0.09375$（下略）

## 古法探源　　衰分术简介

把今有术推广到按比例分配问题时，形成了衰分术。衰（cuī 催）就是差别的意思，“衰分”就是按差别来分配。在《九章算术》里专设了“衰分”章讲解具体算法，“诵课倍增”就是用衰分术解的等比数列应用题。

**例 1**　　赵嫂织麻

赵嫂自言快织麻　张宅李家顾了她
张宅六斤十二两　二斤四两是李家
共织七十二尺布　二人分布闹喧哗
借问卿中能算士　如何分得的无差

答曰：张宅五丈四尺　李宅一丈八尺

选自《算法统宗》

本题是一个很常见的按比例分配的实用题。赵嫂受雇于张、李两家，张家出棉花 6 斤 12 两，李家出棉花 2 斤 4 两，共织成布 72 尺，要求按出棉的比例将布分付两家，问各得多少？

**解**　张家出棉

6（斤）12（两）$=6\times16+12=108$（两）

李家出棉

2（斤）4（两）$=36$（两）

合计出棉

$108+36=144$（两），共织布 72 尺 $=720$ 寸

设张家分布 $x_1$ 尺，则

$$x_1:108=720:144$$

所以 $$x_1=\frac{108\times720}{144}=540\text{（寸）}$$

故张家分布 5 丈 4 尺，李家分布 1 丈 8 尺。

**例 2** 大夫、不更、簪袅（zān niǎo）、上造、公士，凡五人，共猎得五鹿，欲以爵次分之，问各得几何？

选自《九章算术》

大夫、不更、簪袅、上造、公士都是依次排列的官爵名称。据原书注解中称“战国之初有此名也”。《汉书》说“此皆秦制”也从一个方面可以看出《九章》中的题目源头很早。

本题要求将打猎获得的 5 只鹿，按官爵的级别给予赏赐，其分配的比例是：大夫 5，不更 4，簪袅 3，上造 2，公士 1，问各爵次分别得多少？

**解法 1** 《九章算术》的求解程序是：将所分配的比率依次排列出来

$$5:4:3:2:1$$

把各率相加，并以其和作为除数（法）

$$5+4+3+2+1=15$$

由于分配的比率各不相同，决定了他们得数的区别，列出各自应得的比例

5，4，3，2，1

用今有术求得各人的得数。

设大夫应得 $x_1$ 鹿，则有

$$x_1:5=5:15$$

所以 $$x_1=\frac{5\times5}{15}=1\frac{2}{3}\text{（鹿）}$$

同理可以求得

不更得 $$x_2=\frac{5\times4}{15}=1\frac{1}{3}\text{（鹿）}$$

簪袅得 $x_3=\dfrac{5\times 3}{15}=1$（鹿）

上造得 $x_4=\dfrac{5\times 2}{15}=\dfrac{2}{3}$（鹿）

公士得 $x_5=\dfrac{5\times 1}{15}=\dfrac{1}{3}$（鹿）

**解法 2** 本题也可用一元一次方程来求解。

设公士应分 $x$ 鹿，则上造、簪袅、不更、大夫依次分得鹿 $2x$、$3x$、$4x$、$5x$。

由于

$$x+2x+3x+4x+5x=5$$

即

$$15x=5$$

所以 $x=\dfrac{1}{3}$（鹿）（下略）

衰分术是今有术的发展，它能解决众多对象按比例的分配问题。而中学所学的等差、等比数列问题，就本质来说，也是一种分配比例问题，所以古代广泛应用这个方法解决一些数列问题。

**例 3** 今有女善织，日益功疾。初日织五尺，今一月织九匹三丈，问日益几何？

答曰：五寸二十九分寸之十五。

选自《张丘建算经》

这是一道等差数列题，意思是一个善于织布的女子，逐日均匀递增，第 1 日织布 5 尺，一个月（30 日）织布 9 匹 3 丈，问她每日增织多少布？

实际上，这就是在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=5$ 尺，

$$S_{30}=9\text{ 匹 }3\text{ 丈}=9\times 40+30$$

$$=390\text{（尺）}$$

求 $d$。

张丘建在书中给出了计算公式

$$d=\frac{\frac{2S}{n}-2a_1}{n-1}$$

请读者用等差数列的知识加以证明，并核对计算结果。

**例 4** 今有禀粟，大夫、不更、簪袅、上造、公士，凡五人，一十五斗，今有大夫一人后来，亦当禀五斗，仓五粟，欲以衰出之，问各几何？

答曰：大夫出一斗四分斗之一，不更出一斗，簪袅出四分斗之三，上造出四分斗之二，公士出四分斗之一。

选自《九章算术》

本题的意思是：仓库共有 15 斗谷子，按照爵级依次分给大夫 5 斗，不更 4 斗，簪袅 3 斗，上造 2 斗，公士 1 斗。后来，又来了一位大夫，也和他们一样按大夫级的标准分谷，而仓库已没有余谷，要按各级分割的比例扣减出来，问各人应出谷多少？

**解** 这是一道等差数列问题，五个爵位已把 15 斗粟按 5∶4∶3∶2∶1分给各人，得粟为

5，4，3，2，1

公差是 1 斗。

后来，又来了一位大夫，要按同样的比率分粟，这时分配的比例依次为

5，5，4，3，2，1

其和为

$$5+5+4+3+2+1=20$$

按原大夫应得 5 斗的标准，依率从各人所得中扣减出来，

大夫应出

$$5\times\frac{5}{20}=1\frac{1}{4}\ (\text{斗})$$

不更应出

$$5\times\frac{4}{20}=1\ (\text{斗})$$

簪袅应出

$$5\times\frac{3}{20}=\frac{3}{4}\ (\text{斗})$$

上造应出

$$5\times\frac{2}{20}=\frac{1}{2}\ (\text{斗})$$

公士应出

$$5\times\frac{1}{20}=\frac{1}{4}\ (\text{斗})$$

从解答过程中可以看出，衰分法还是一种很灵活的解题方法，就本题来说，比硬套等差数列的公式还要简便一些。

## 读读练练　　练　习　题

1. 八子分棉

九百九十六斤棉　赠与八子做盘缠（即路费）

次第每人多十七　要将第八数来言

务要分明依次第　孝和休惹外人传

答曰：长子 184 斤，次子 167 斤，三子 150 斤，四子 133 斤，五子 116 斤，六子 99 斤，七子 82 斤，八子 65 斤。

2. 依等算钞

甲乙丙丁戊己庚　七人钱本不均平　甲乙念三七钱钞

念六一钱戊己庚　惟有丙丁钱无数　细推详算莫差争

答曰：甲 12 两 2 钱，乙 11 两 5 钱，丙 10 两 8 钱

丁 10 两 1 钱，戊 9 两 4 钱，己 8 两 7 钱，庚 8 两

选自《算法统宗》

提示："念"代表二十，同"廿"，念三七钱即 23 两 7 钱，念六一钱即 26 两 1 钱。

# 24 浮屠增级

远望巍巍塔七层　红光点点倍加增

共灯三百八十一　请问尖头几盏灯

答曰：顶层三盏

选自《算法统宗》



浮屠就是佛塔。本题是说，远处有一座雄伟的佛塔，塔上挂满了许多红灯，下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，全塔共有 381 盏，试问顶层有几盏灯?

这类题现在高中学生都用等比数列的知识求解，古代用衰分术来解，浅显易懂，小学生都会做。程大位在《算法统宗》里说："衰者，等也。物之混者，求其等而分之。"即按照各层比例的要求，算出总的要分多少份，再求每一份应是多少。

**解法 1** 衰分法

首先列出各层灯数的比。依题意从上而下灯数之比是

$$1:2:4:8:16:32:64$$

其总和为

$$1+2+4+8+16+32+64=127$$

即把总灯数分成 127 份，一份的灯数是 $361\div127=3$，这就是顶层的灯数。

掌握了衰分的思想，用心算都能报出答案来。

**解法 2** 等比数列法

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $S_7=361$，$q=2$，求 $a_1$。

请读者利用已学的公式自行验算。

## 古算故事 我国最早的数学选拔赛

我国最早的数学选拔赛是在公元 855 年。这不是正式比赛，而是应急的加试。唐朝青州尚书杨损，要选拔一名官员，两名候选者条件相当，不相上下，于是他以"当官要善于计算"为由，加试一道数学题：

一批强盗在林里商议怎样瓜分抢来的布匹。若每人分 6

匹，多出5匹；每人分7匹则不足8匹，问几个强盗？一共抢来多少匹布？

二人中一人先做对了，故被选中。

这是一道常见的基础题，请读者自算答案。就这样一个简单的古题，唐代却用来考官，可见是有一定背景的。我国古代数学家后来做出了大文章。

**读读练练**　　　**练　习　题**

1. 今有五等诸侯共分橘子六十颗，人别加三颗，问五人各得几何？

答曰：公18颗，侯15颗，伯12颗，子9颗，爵6颗。

2. 今有女子善织，日自倍，五日织通五尺，问日织几何？

答曰：初日织$1\frac{19}{31}$寸，次日$3\frac{7}{31}$寸，次日$6\frac{14}{31}$寸，次日$12\frac{28}{31}$寸，次日$25\frac{25}{13}$寸。

3. 今有三鸡共啄粟一千一粒，雏啄一，母啄二，翁啄四，主责本粟三鸡主各偿几何？

答曰：鸡雏主143，鸡母主286，鸡翁主572。

选自《孙子算经》

# 25 李白沽酒

今携一壶酒　游春郊外走　逢朋加一倍

入店饮斗九　相逢三处店　饮尽壶中酒

试问能算士　如何知原有

答曰：原有酒一斗六升六合二勺五抄

选自《算法统宗》



李白，唐代大诗人，曾漫游全国，吟诗作赋，博学多才。民间有：“斗酒诗百篇”之说。晚年生活清苦，卒与安徽当涂。本题借李白之名，编了一则饮酒故事，说他在郊外春游时，做出这样一条规定：遇见朋友，先到酒店里将壶里的酒增加一倍，再饮去其中的 19 升酒。根据这样的规定，在三个店里遇到了朋友，正好饮尽壶中的酒。问壶中原有多少酒?

**解法 1**　一元一次方程

设壶中原有酒 $x$ 升，依题意有

$$2\left[2(2x-19)-19\right]-19=0$$

解得

$$x=16.625\ (\text{升})$$

**解法 2**　中算古法

利用中算“比率”的思想，分析“倍酒量”和“饮酒量”之间的比例关系。

设原有酒为 1，入第一店添一倍为 2，入第二店添一倍为 $2^2=4$，入第三店添一倍为 $2^3=8$，倍酒后相当于原有酒的 8 倍，但要从中扣减各店的饮酒量。第一店饮 19 升，经第二、第三店的倍酒关系，应扣减 $2^2\times19$ 升；第二店饮 19 升，经第三店的倍酒，应扣减 $2\times19$ 升；第三店实饮 19 升，故应从总酒量中扣减 $(1+2+4)\times19=7\times19$ 升，这时正好饮尽，说明 8 倍的原酒量 $=7\times19$ 升。

所以原酒量为

$$\frac{7}{8}\times19=16.625(\text{升})$$

**解法 3**　递推数列

设原有酒 $a_0$ 升，在三店饮酒后所余酒量分别为

$$a_1=2a_0-19,\ a_2=2a_1-19,\ a_3=a_2-19$$

如果店数逐一增加，第 $n$ 个店饮后余酒

$$a_n=2a_{n-1}-19$$

两边同减 19 得

$$a_n-19=2(a_{n-1}-19)$$

显然，数列 $\{a_n-19\}$ 是一个公比为 2 的等比数列，由通项公式

$$a_n-19=2(a_0-19)\times 2^{n-1}=2^n(a_0-19)$$

所以 $$a_n=2^n a_0-(2^n-1)\times 19$$

如果在第 $n$ 店“饮尽壶中酒”，即 $a_n=0$，有

$$2^n a_0=(2^n-1)\times 19,\ a_0=\frac{2^n-1}{2^n}\times 19$$

当 $n=3$ 时

$$a_0=\frac{7}{8}\times 19=16.625(升)$$

这个方法虽然复杂，但它给我们引出了一个常用的递推关系式。

## 古为今用　递推公式 $a_{n+1}=ca_n+d$ 的应用

“李白沽酒”的解法 3 里，我们导出了递推公式 $a_{n+1}=2a_n-19$，它表示前后店里余酒之间的递推关系。这是一个重要的数学模型，生活中应用很多，像经济增长、资源消耗、人口增加、土地减少、银行按揭等都属于这个类型。现举几例说明之。

**例 1**　已知数列 $\{a_n\}$ 的项满足

$$\begin{cases} a_1=b \\ a_{n+1}=ca_n+d \end{cases}\quad 其中\ c\neq 0,\ n>1$$

证明这个数列的通项公式是 $a_n=\dfrac{bc^n+(d-b)c^{n-1}-d}{c-1}$。

这是原高中代数课本中的一道复习题，是数学复习和高考的常考内容之一。

**证法 1** 因为 $a_1=b$

$a_2=ca_1+d=c(b+d)$

$a_3=ca_2+d=c[c(b+d)]+d=c^2b+d(1+c)$

$a_4=ca_3+d=c[c^2b+d(1+c)]+d=c^3b+d(1+c+c^2)$

……

$$a_n=ca_{n-1}+d=c^{n-1}b+d(1+c+c^2+\cdots+c^{n-2})$$
$$=c^{n-1}b+d\cdot\frac{c^{n-1}-1}{c-1}=\frac{bc^n+(d-b)c^{n-1}-d}{c-1}$$

**证法 2** 待定系数法

设法确定参数 $\alpha$，使得 $a_{n+1}-\alpha=c(a_n-\alpha)$，这样就可以归纳为求等比数列 $\{a_n-\alpha\}$ 的通项了。

由 $a_{n+1}-\alpha=c(a_n-\alpha)$，即 $a_{n+1}=ca_n-\alpha(c-1)$，与已知条件 $a_{n+1}=ca_n+d$ 相比较可知，只要 $-\alpha(c-1)=d$ 就行了。

取 $\alpha=-\dfrac{d}{c-1}$，这时 $\{a_n-\alpha\}$ 成等比数列，公比是 $c$。

所以 $\quad a_n-\alpha=(a_1-\alpha)\cdot c^{n-1}$

$$a_n=\alpha+(a_1-\alpha)\cdot c^{n-1}=-\frac{d}{c-1}+\left(b+\frac{d}{c-1}\right)\cdot c^{n-1}$$
$$=\frac{bc^n+(d-b)c^{n-1}-d}{c-1}$$

**例 2** （2002 年高考题）某城市 2001 年末汽车保有量为 30 万辆，预计此后每年报废上一年末汽车保有量的 6%，并且每年新增汽车数量相同。为保护城市环境，要求该城市汽车保有量不超过 60 万辆，那么每年新增汽车数量不应超过多少万辆？

**解** 设 2001 年末汽车保有量 $a_1=b=30$ 万辆，以后各年的汽车保有量依次为 $a_2$，…，$a_n$，每年新增汽车 $d$ 万辆。

令 $c=1-6\%=0.94$，则

$$a_2=a_1\ (1-6\%)\ +d=bc+d$$

$$a_3=a_2\ (1-6\%)\ +d=a_2c+d$$

……

$$a_n=a_{n-1}\ (1-6\%)\ +d=a_{n-1}c+d$$

利用上题结果，有

$$a_n=\frac{1}{c-1}\ [bc^n+\ (d-b)\ c^{n-1}-d]$$

即

$$a_n=\frac{1}{0.06}\ [d-30\times0.94^n-\ (d-30)\ \times0.94^{n-1}]$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{d}{0.06}$$

而

$$a_n\leqslant60\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

所以 $$\frac{d}{0.06}\leqslant60,\ d\leqslant3.6\ (\text{万辆})$$

**例 3** （银行按揭贷款题）

（1）住房贷款涉及千家万户，其还本付息方法，银行提出了以下的公式，并列出了还本付息表，请给出公式（25-1）的证明，并利用计算器验算表中第一行的数据（表 25-1）。

等额本息还款法：在贷款期内，每月以相等的额度平均偿还贷款本息，其计算公式为

$$\text{每月还款额}=\frac{\text{贷款本金}\times\text{月利率}\times\ (1+\text{月利率})^{\text{还款月数}}}{(1+\text{月利率})^{\text{还款月数}}-1}\tag{25-1}$$

等额本金还款法：在贷款期内，每月等额偿还贷款本金，贷款利息随本金逐月递减，其计算公式为

$$每月还款额=\frac{贷款本金}{贷款期月数}+(贷款本金-已归还本金累计额)\times月利率 \qquad (25\text{-}2)$$

**表 25-1　个人住房贷款（万元）还本付息金额表**

2002 年 2 月 21 日执行　　　　单位：元

| 贷款期限（月） | 月利率 | 月均还款额 | 利息总额 |
| --- | --- | --- | --- |
| 24 | 3.975 | 437.68 | 504.43 |
| 36 | 3.975 | 298.68 | 752.39 |
| 48 | 3.975 | 229.25 | 1004.12 |
| 60 | 3.975 | 187.66 | 1259.63 |
| 72 | 4.2 | 161.23 | 1608.92 |
| 84 | 4.2 | 141.53 | 1888.28 |
| 96 | 4.2 | 126.79 | 2171.81 |
| 108 | 4.2 | 115.37 | 2459.51 |
| 120 | 4.2 | 106.26 | 2751.34 |

(2) 某人从银行得到买房贷款 40 万元。计划 20 年（240 个月）还清贷款，如果年利率定为 5.58%（折合月利率为 4.65‰）。按等额本息还款法，求贷款的月均还款额、还款总额和利息负担的总和（可以利用已证明的公式）。

(3) 在 (2) 的同等条件下，按等额本金还款法，计算贷款人利息负担的总和，并求比前一种还款法少支付利息多少万元？

**解**　(1) 我们提供两种方法证明公式 (25-1)。

**证法 1**　设贷款本金为 $A$，月利率为 $r$，还款月数为 $n$，每月还款金额为 $x$。那么，各期所还款项所产生的本利和等于在约定期内贷款的本利和，即

$$x+x(1+r)+\cdots+x(1+r)^{n-1}=A(1+r)^n$$

$$x\cdot\frac{(1+r)^n-1}{(1+r)-1}=A(1+r)^n$$

所以

$$x=\frac{A\cdot r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$$

**证法 2** 用递推数列的方法来证。

设 $B_k$ 为第 $k$ 月末还款后尚欠银行的本利和，则

$B_1 = A(1+r) - x$

$B_2 = B_1(1+r) - x = A(1+r)^2 - x[1+(1+r)]$，

$$B_n = B_{n-1}(1+r) - x = A(1+r)^n - x[1+(1+r) + \cdots + (1+r)^{n-1}]$$

$$= A(1+r)^n - x \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

由 $B_n = 0$ 得 $x = \dfrac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

验算第一行的数据：$A = 1$，$r = 3.975‰ = 0.003975$，$n = 24$。

$$x = \frac{1 \times 0.003975 \times 1.003975^{24}}{1.003975^{24} - 1} = \frac{0.003975 \times 1.0998909}{0.0998908}$$

$$= \frac{0.00437207}{0.0998908} = 0.0437684 \text{（万元）}$$

$$= 437.68 \text{（元）}$$

到期本利和为 $437.68 \times 12 = 10504.32$（元），利息总额为 504.32 元。

（2）将 $A = 40$，$r = 4.65‰$，$n = 24$ 代入上述公式，算得

$$x = 0.276965 \text{（万元）} = 2769.65 \text{（元）}$$

还款总额为 $240 \times x = 66.4717$（万元），利息负担的总和为

$$66.4717 - 40 = 26.4717 \text{（万元）}$$

（3）根据等额本金还款法的要求，每月还本的款额为 $\dfrac{A}{n}$，我们用 $B_k$ 表示 $k$ 个月末应付给银行的利息款，等于公式(25-2)中：(贷款本金一已归还本金累计额）×月利率，则

$B_1 = Ar$

$B_2 = A\left(1 - \frac{1}{n}\right)r$

……

$B_n = A\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)r$

令 $S_n = B_1 + B_2 + \cdots + B_n = A\left[n - \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}\right)\right] \cdot r$

$= \frac{(n+1)\ Ar}{2}$

以 $A = 40$，$n = 240$，$r = 4.65$ 代入得 $S_n = 22.43$（万元）

比前一种贷款方案少付 26.4717 − 22.43 = 4.0587（万元）

## 读读练练　　练　习　题

1.　　沽酒探亲

昨日沽酒探亲朋　路途遥远有四程
行过一程添一倍　却被顽童盗六升
行到亲家门里面　半点全无在酒瓶
借问高明能算者　几何原酒要分明

答曰：原酒五升六合二勺五抄

选自《算法统宗》

2.（牛顿问题）一人经商，每年财产增加$\frac{1}{3}$，但要从中花去家用的 100 英镑（包括商业投资），经过三年后，他的财产翻了一番，问他原有财产是多少？(1480 英镑)

# 26 群羊逐草

甲赶群羊逐草茂，乙携肥羊一只随其后。戏问甲及一百否？甲云所说无差谬。若得这般一群凑，再添半群小半群，得你一只来方凑，玄机奥妙谁参透？

答曰：甲羊三十六只

选自《算法统宗》



这是一个在民间流传很广的智力训练题。题目的意思是说，牧童甲在草原上放羊，乙牵着一只羊来，并问甲："你的羊群有 100 只吗"？甲答："你说的不错。如果在这群羊里加上同样的一群，再加上半群，四分之一群，再加上你的一只，就是一百只"。问牧童甲赶着多少只羊？

**解法 1**　一元一次方程

设牧童甲放 $x$ 只羊，依题意有

$$x\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+1=100$$

即

$$\frac{11}{4}x=99 \qquad x=36$$

所以甲在牧场里放了 36 只羊。

**解法 2**　中算古法

在我国古代，人们还不会用一元一次方程来解这样的应用题，常常假定一个数字作为甲的羊群数，例如假设甲的羊数是 12，那么，"若得这般一群凑，再添半群小半群"就是

$$12+12+6+3=33$$

这样本题就可以转化用"今有术"来解了。即：如果甲有 12 只羊，按照题设的条件进行计算应是 33 只羊。现在已知的羊数是 $100-1=99$ 只羊，这样甲童的羊数 $x$，就可以用比例来算了。

$$x:12=99:33 \qquad 所以\ x=36\ （只）$$

大家应好好体会一下我国古代数学家研究问题的思维方法。这种方法叫"一次假设法"，不用草稿，用心算就行了。读者可以给甲的羊数重新假设一数，再试算一次，看看哪一个数字最简便？

## 古法探源　一次假设法

解方程是中学数学的重点，而一元一次方程又是初中数学中最简单的内容了。每一个学生都能熟练地应用“移项法则”和“方程两边同乘（或同除）一个不为0的数，而方程的解不变。”的性质来解方程。在古代这可是一个难题，很长一段时间里方程的理论没有形成，“一次假设法”就是世界上许多文明古国常用的方法。

设一次方程

$$ax = b \qquad (a \neq 0) \qquad (26\text{-}1)$$

它的解是

$$x = \frac{b}{a}$$

由于当时没有发现方程的同解性质，不能直接通过除法运算去求它的根，而是用试根的方法，把它转化为比例问题，用“今有术”求解。

观察题目的条件，试选一个数 $x_0$ 代入计算，看看 $ax_0$ 是否等于 $b$。如果等于 $b$，那么就猜对了；如果不等于 $b$，即

$$ax_0 = b_1 \qquad (b_1 \neq b) \qquad (26\text{-}2)$$

对比（26-1），（26-2）两式　　$ax = b$

将 $x_0$ 按 $b:b_1$ 的比例进行缩放

$$x_0 : x = b_1 : b$$

所以

$$x = \frac{x_0 \cdot b}{b_1}$$

在上面的“群羊逐草”题中，就可以用“一次假设法”快速地求得答数。事实上，我们假设甲有 12 只羊，依条件算出的结果是 33 只，而现有数是 99，比例系数是 3，显然，甲有 36 只羊。

下面我们再看两个外国的例题。

**例 1** 莲花若干朵，以其三分之一、五分之一、六分之一、四分之一分献诸神，还余六朵，问原有莲花多少朵？（印度摩诃毗罗）

**解** 随便选择一个数，为了避免分数，我们取 3，5，6，4 的最小公倍数 60。设有莲花 180 朵，那么献神共需

$$180\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)=171\ (\text{朵})$$

还余 9 朵，而题设余 6 朵。按照今有术，若莲花 $x$ 朵，则

$$x:180=6:9,$$

所以
$$x=\frac{6\times180}{9}=120\ (\text{朵})$$

**例 2** 如果甲从乙得到 7 个钱币，甲所有是乙的 5 倍。乙从甲得到 5 个钱币，则乙所有是甲的 7 倍。问甲、乙两人原来各有多少钱币？

答数：　甲　$7\frac{2}{17}$，　乙　$9\frac{14}{17}$。

选自意大利·斐波那契《计算之书》

这个题用“一次假设法”来解就很难了，要选的一个数，一定要能概括它们的共性。斐波那契用“形数结合”的方法，巧妙地解决了这个问题。

图 26-1 中线段代表钱数，设甲 = $AB$，乙 = $BC$，$EB=5$，$BD=7$。

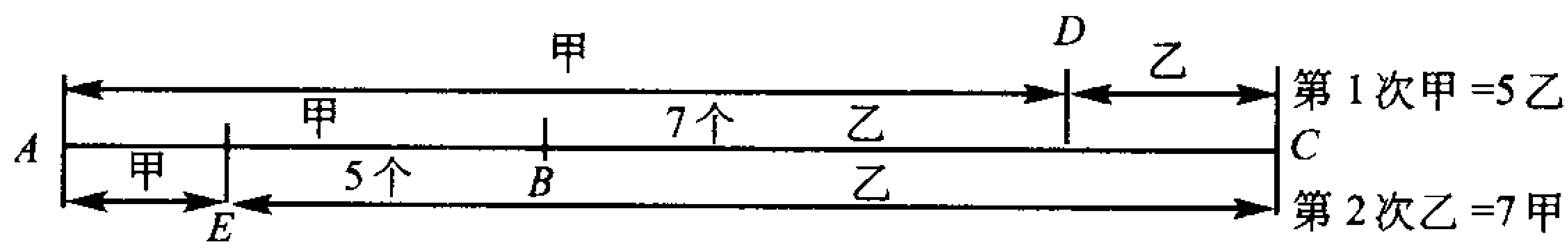



图 26-1

第1次，乙给甲7个，则

$$甲=AD，乙=DC，AD=5DC，DC=\frac{1}{6}AC$$

第2次，甲给乙5个，则

$$甲=AE，乙=EC，EC=7AE，AE=\frac{1}{8}AC$$

这样，

$$ED=AC-AE-DC=\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)AC=\frac{17}{24}AC \quad (26\text{-}3)$$

又已知

$$ED=12 \quad (26\text{-}4)$$

这样，给 $AC$ 假设一个数，通过（26-4）式，就可以确定放缩的比例系数。

例如，设 $AC=24$，则 $ED=17$，若 $AB$ 的实际长度为 $x$，于是有

$$x:24=12:17,\qquad x=\frac{12\times24}{17}$$

$$DC=\frac{1}{6}AC=2\frac{14}{17},\qquad AE=\frac{1}{8}AC=2\frac{2}{17}$$

所以 $$甲=AB=7\frac{2}{17},\qquad 乙=BC=9\frac{14}{17}$$

这是一道名题，如果用二元一次方程组来解是非常简单的。要知道，在方程理论产生之前，这是一个很难的题目，在比例理论的基础上，用一次假设法来解是历史的轨迹，从中可

以体会到前辈的艰辛，不过在茶余饭后，用算术的方法来解，对培养分析问题的能力还是大有好处的。

**读读练练**　　**练　习　题**

用“一次假设法”解下列问题：

1. 某数乘以5，减去乘积的1/3，把余数除以10，又加上此数的2，1/2，又3/4，得到68。问此数是多少？（印度）(48)

2. 2/3堆加上1/2堆，加上1/7堆，再加上1堆，四者共重37，求一堆重多少？(埃及) $(16\frac{2}{97})$

# 27 隔墙分银

**隔墙听得客分银　不知人数不知银**

**七两分之多四两　九两分之少半斤**

**答曰：六人，银四十六两**

选自《算法统宗》

有若干客人分银若干两，如果每人分 7 两，还多 4 两；如果每人分 9 两。则不足 8 两，问有多少客人？银多少两？

注意：题中斤两是旧制，1 斤 = 16 两。

**解法 1**　二元一次方程组

设有 $x$ 个客人，分 $y$ 两银，依题意列方程组

$$\begin{cases} y-7x=4 & (27\text{-}1) \\ 9x-y=8 & (27\text{-}2) \end{cases}$$

两式相加得

$$2x=12$$

所以

$$x=6$$

以 $x=6$ 代入（27-1）式得　$y=46$

所以，共有客 6 人，分银 46 两。

**解法 2**　中算古法

首先，将两次所出的银数和相应的盈余、不足数排成一个方阵：

$$\begin{matrix} 7 & & 9 \\ & \times & \\ 4 & & 8 \end{matrix}$$

交叉相乘，并将乘积相加

$$7\times8+9\times4=92$$

将所得的积除以（9－7）得银数；将盈和不足数相加，其和除以（9－7）得人数。即

$$银数=\frac{7\times8+9\times4}{9-7}=\frac{92}{2}=46\text{（两）},\quad 人数=\frac{8+4}{9-7}=6\text{（人）}$$

请读者想一想，这种算法的道理何在？

## 古法探源　　盈不足术简介

盈不足术是我国古代解应用题的一种别开生面的方法。《九章算术》对它的各种题型进行了全面的讨论。盈亏问题又成为我国古代乃至现代教育蒙童、训练思维的一种重要题型。它不仅妙趣横生，而且意义深远。如果说在远古时代，比率算法曾被誉为“生金蛋的母鸡”，作为数学应用题的普遍解法而“独霸天下”，那么“金蛋”孵化出的“盈不足”术又被誉为“万能算法”，开拓了新的领域。钱宝琮先生说：“在十六、十七世纪时期，欧洲人的代数学还没有发展到充分利用符号的阶段，这种万能的算法便长期统治了他们的数学王国。”

当然，在今天这类题目用二元一次方程组来解已极为容易。教科书上几乎不花什么力气来叙述它的文化背景了。但是先辈们处理这些问题的指导思想、思维方法、计算成果恰是一个智慧的宝库，值得探讨、继承。所以我们要“易题难做”，想一想古法的道理安在？

《九章算术》盈不足章，开篇即注盈不足乃“以御隐杂互见”。就是说盈不足术能处理隐而不见的、杂七杂八的数量关系。它用的是什么方法呢？就本质说是试验法（二次），“摸着石头过河”，举2个数据，试验测定盈亏情况，再寻求变量间的关系。

**例** 今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四。问人数、物价各几何？

答曰：七人，物价五十三

选自《九章算术》

本题是说，有几个人（人数不知）一起去买物品（物价不知），假若每人出8元，则盈余3元：假若每人出7元，则不足4元。问人数和物价各是多少？

**解法1** 我们先用二元一次方程组来解这个容易题。

设有 $x$ 个人共同去买一件物品，物品价格是 $y$ 元，由条件得

$$\begin{cases} 8x - y = 3 \\ y - 7x = 4 \end{cases}$$

两式相加得

$$x = 7,\quad y = 53$$

所以共有7人，物价为53。

**解法2** 中算古法

《九章算术》不是用这样的方法解的。书中写明了计算法则，但算理难明，不容易理解古人的数学思想。我们先研究一下原书的解法。

“盈不足术曰：置所出率，盈、不足各居其下。令维乘所出率，并以为实。并盈、不足为法。实如法而一。有分者通

之。盈不足相与同其买物者，置所出率，以少减多，余以约法、实。实为物价，法为人数。"

沈康身先生将这法则作了翻译："盈不足法则：分别记下所出率。在各自下面又记下相应的盈、不足之数，交叉相乘所出率。乘积相加，作为被除数，盈、不足相加，作为除数。做除法运算，[得每人应出款数]。如果出现分数就通分。合款买物，如果发生盈、足，就记所出率，从大的减去小的。以差，分别约除数、被除数。所得商：前者为人数，后者为物价。"文字上已经译解得很清楚了，道理何在？我们再做进一步的分析。

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{维乘}} \begin{pmatrix} 8\times4 & 7\times3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{相并}} \begin{pmatrix} 8\times4+7\times3 \\ 3+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{实如法而一}}$$

$\dfrac{8\times4+7\times3}{3+4}$（每人应出的钱数）

这样就得到了一个公式

$$\text{每人应出的钱数} = \frac{8\times4+7\times3}{3+4} = \frac{53}{7} \qquad (27\text{-}3)$$

在这个分数中，除数是 3 + 4，被除数是 8 × 4 + 3 × 7，用所出率的大 − 小 = 8 − 7 = 1（差），是一个很关键的数字，用它去除上式的分母得人数，即

$$\text{人数} = \frac{3+4}{8-7} = 7 \qquad (27\text{-}4)$$

用它去除上式的分子得物价，即

$$\text{物价} = \frac{8\times4+7\times3}{8-7} = 53 \qquad (27\text{-}5)$$

上述三个式子虽不复杂，但道理难懂。我国古代常常"寓

理于算”，一定要花力气想通其中的道理。下面我们进行一般性的分析。

今有共买物，人出 $x_1$（钱），盈 $y_1$；人出 $x_2$，不足 $y_2$，问人数、物价各几何？

在上题的数字方阵中，实际上是表示这样的关系：“每人出钱 $x_1$，买物 1，盈钱 $y_1$；每人出钱 $x_2$，买物 1，不足 $y_2$。”用数字方阵表示，应是

$$\begin{matrix}\text{人出钱}\\ \text{买　物}\\ \text{盈不足}\end{matrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ 1 & 1\\ y_1\ (\text{盈}) & y_2\ (\text{不足})\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{齐同术}}\begin{pmatrix}x_1y_2 & x_2y_1\\ y_2 & y_1\\ y_1y_2\ (\text{盈}) & y_2y_1\ (\text{不足})\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}x_1y_2+x_2y_1\\ y_1+y_2\\ (\text{不盈不亏})\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}\\ 1\\ (\text{不盈不亏})\end{pmatrix}$$

这个过程综合应用了齐同术、今有术的思想，求得了买一物每人应该出的钱数，即

$$\text{每人应出的钱数}=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2} \qquad (27\text{-}6)$$

$x_1-x_2$ 是一个人两次出钱数额之差，即假设数之差，《九章算术》里称为“少设”，$y_1+y_2$ 是盈与不足的和，是众人出钱的总金额的差，所以，得到了第二个公式：盈不足为众人之差，以所出率以少减多，余为一人之差，以一人之差约众人之差，故得人数也。

$$\text{人数}=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2} \qquad (27\text{-}7)$$

因为是买一件物品，所以

$$\text{物价} = \text{人数} \times \text{每人应出的钱数} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 - x_2} \times \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{y_1 + y_2} = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_1 - x_2} \quad (27\text{-}8)$$

这就是我国古代盈不足术的 3 个主要公式。

## 读读练练　　练　习　题

1. 今有共买牛，七家共出一百九十，不足三百三十；九家共出二百七十，盈三十。问家数、牛价各几何？

答曰：一百二十六家，牛价三千七百五十。

选自《九章算术》

2. 今有人盗库绢，不知所失几何？但闻草中分绢：人得六匹，盈六匹；人得七匹，不足七匹。问人、绢各几何？

答曰：贼一十三人，绢八十四匹。

选自《孙子算经》

3. 假如贼人盗绢，各分一十二匹，总多一十二匹；各分一十四匹，总少六匹。问贼人与绢各几何？

答曰：贼是九人，绢百二十匹。

选自《续古摘奇算法》卷下

4. 桥下盗人分绢，每人分八匹，少七匹；每人分七匹，多八匹。问有多少人、分多少绢？

答曰：十五人，一百一十三匹。

日本《劫尘记》1672

# 28 蒲莞同高

**今有蒲生一日，长三尺。莞生一日，长一尺。蒲生日自半，莞生日自倍。问几何日而长等？**

**答曰：二日十三分日之六。各长四尺八寸一十三分寸之六**

**术曰：假令二日，不足一尺五寸。令之三日，有余一尺七寸半**

选自《九章算术》

蒲草和莞草都是可以编席子的草本植物，已知蒲草第 1 日长高 3 尺，莞草第 1 日长高 1 尺。此后蒲草每日长高数是前一日的一半，而莞草是前日的一倍。问几日后两草有相等的高度?

本题虽然是一个趣味问题，却涉及了一些非常复杂的数量关系，它超越了前面几个例题中简单的比例关系的范畴。我国古代数学家构思了一种解决问题的一般方法，叫“二次假设法”，把它归结为“盈不足”的问题。这个解法的科学性如何，读者可以探究。但在那个时代，毕竟是很有意义的创举。

**解法 1** 中算古法

假设经过 2 日，则

$$蒲草高度=3+3\times\frac{1}{2}=4.5\ (尺)$$

$$莞草高度=1+1\times2=3\ (尺)$$

对莞草来说，不足 $4.5-3=1.5$（尺）；

假设经过 3 日，则

$$蒲草高度=3+3\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}=5.25\ (尺)$$

$$莞草高度=1+1\times2+1\times2^2=7\ (尺)$$

这时，莞草超过蒲草

$$7-5.25=1.75\ (尺)$$

这样，就把本题归结为盈不足问题。由公式（27-6）得相会日数为

$$\frac{2\times1.75+3\times1.5}{1.75+1.5}=\frac{3.5+435}{3.25}=\frac{32}{13}=2\frac{6}{13}\ (日)$$

这时蒲草高度是

$$3+3\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{6}{13}=4\frac{11}{13}\ (尺)$$

$$4\frac{11}{13}=4+\frac{8}{10}+\frac{6}{130}\ (尺)\ =4尺8\frac{6}{13}\ (寸)$$

同理，莞草也是这个高度。

**解法 2** 一元一次方程

本题是很古很古时的算题，出于当时人们的知识基础和认知水平，虽然实地测出了蒲草和莞草每日的生长速度不同，但在同一天内仍然把它们的长速当成是匀速的。在这个前提下，用一元一次方程来解。

设经过 $x$ 日，两草的高度相等，根据解法 1 的分析，$x$ 应在（2，3）日之间，即 $2<x<3$，由此列出方程

$$3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\ (x-2)\ =1+2+4\ (x-2)$$

解得

$$x=2\frac{6}{13}\ (日)\ (下略)$$

## 古法探源　　二次假设法

起源于我国的盈不足问题，就原型来说是很简单的。为什么在古代备受推崇呢？一方面它能解决当时的许多难题，另一方面，据专家们分析，很可能经过丝绸之路，传到了中亚伊斯兰国家，在许多国家得到了研究和应用，以至中世纪、文艺复兴时代的一些数学家多用“震旦”（即中国）来命名这一算法。

就数学思想来说，今有术基本上解决了成“比例”关系的一类应用题，而对于一些“隐杂互见”的非线性问题，如“蒲莞同高”题就需要另寻新法，盈不足就是在这一背景下产生的一种能解决一般问题的“万能”方法。

就数量关系来说，两个变量 $x$ 和 $y$ 之间的数量关系 $y=f(x)$ 并不明确，做两次试验，取得两组数据 $(x_1, y_1)$，$(x_2, y_2)$，不管它是什么样的关系，都把它归结为“盈不足”题型。用现代的眼光来看，就是用两点间的线段来近似代替曲线 $y=f(x)$，也就是“直线内插法”的原型。它是我国“比率”算法的发展和创新。

现在，我们继续研究“蒲莞同高”的问题（图 28-1、图 28-2）。蒲莞生长虽然是变速的，但题目是在认定它在一天之内的生长是匀速的。这样，由题设条件，蒲莞的生长速度为：

$$v_{蒲}=\begin{cases}3 & (0\leqslant x<1)\\ 3\times\dfrac{1}{2} & (1\leqslant x<2)\\ 3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 & (2\leqslant x<3)\\ \cdots\cdots & \end{cases}\qquad v_{莞}=\begin{cases}1 & (0\leqslant x<1)\\ 2 & (1\leqslant x<2)\\ 2^2 & (2\leqslant x<3)\\ & \cdots\cdots\end{cases}$$

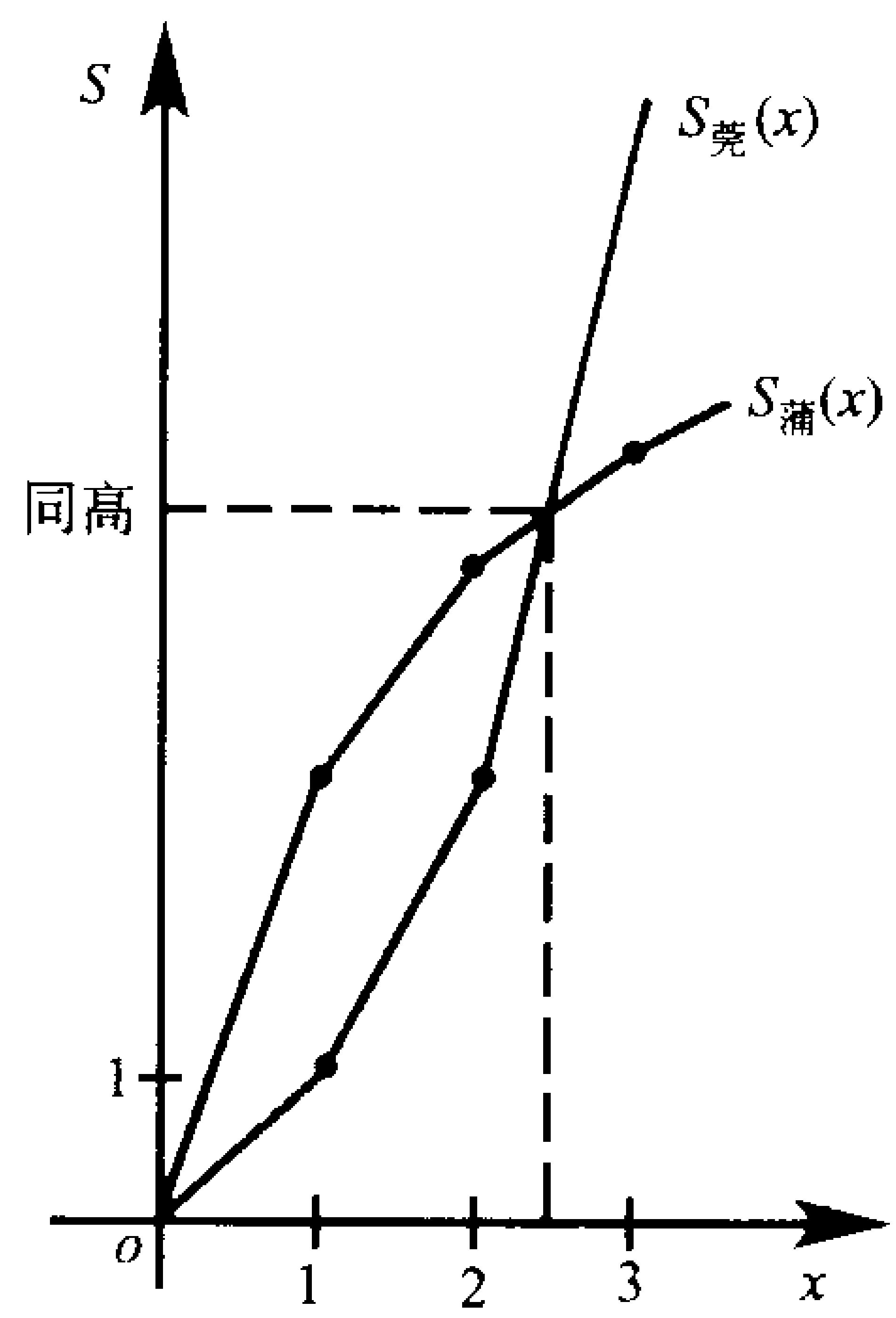



图 28-1

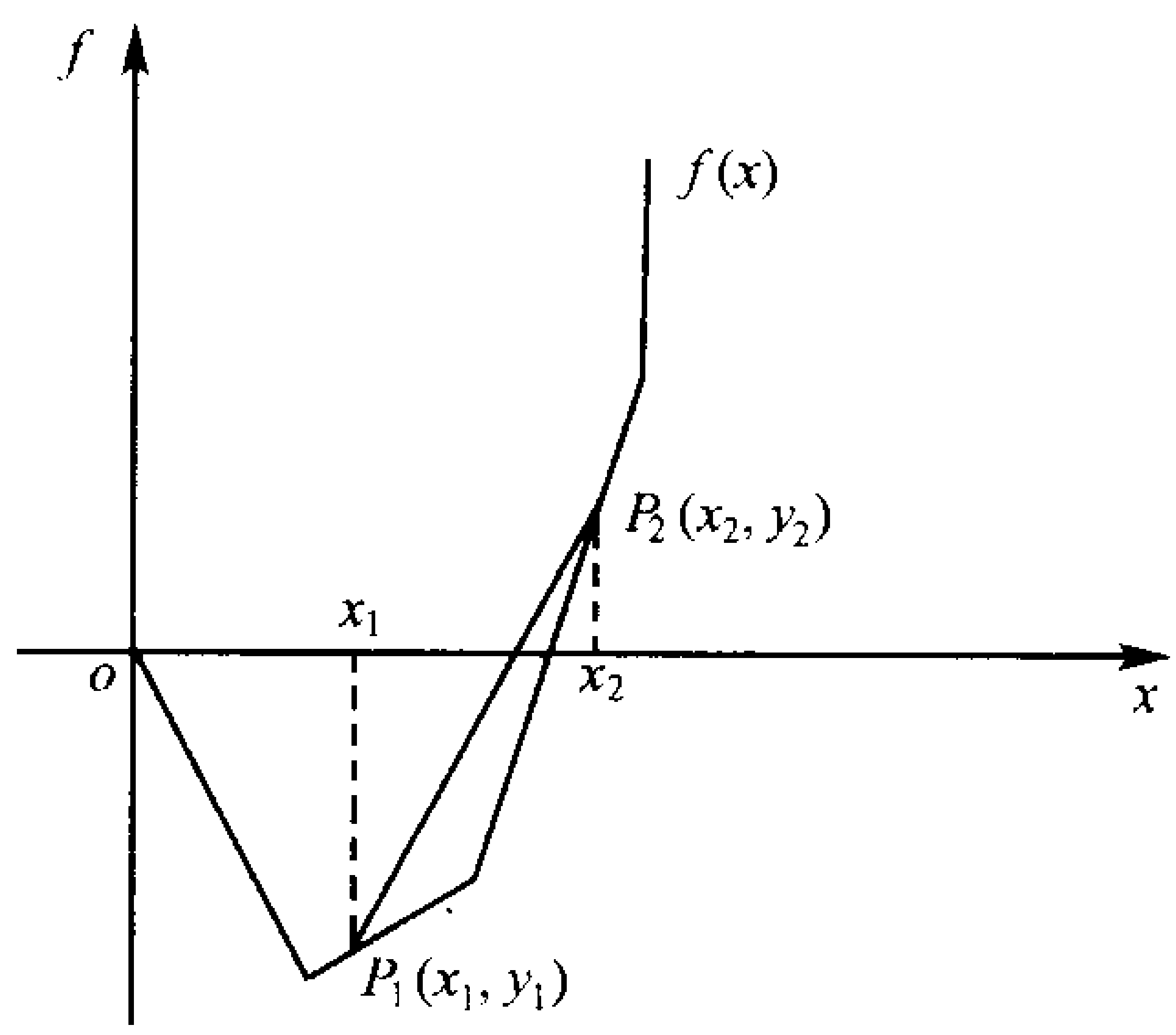



图 28-2

蒲草和莞草生长的高度 $S$ 与日数 $x$ 的函数关系是

$$S_{蒲}(x)=\begin{cases}3x & (0\leqslant x<1)\\ 3+\frac{3}{2}(x-1)=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2} & (1\leqslant x<2)\\ 3+\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}(x-2)=\frac{3}{4}x+3 & (2\leqslant x<3)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\end{cases}$$

$$S_{莞}(x)=\begin{cases}x & (0\leqslant x<1)\\ 1+2(x-1)=2x-1 & (1\leqslant x<2)\\ 1+2+2^2(x-2)=4x-5 & (2\leqslant x<3)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\end{cases}$$

这是两个分段函数，经过两次试验，确定在 $2\leqslant x<3$ 时，蒲莞同高，故由

$$\frac{3}{4}x+3=4x-5,\ 得\ x=2\frac{6}{13}\ (日)$$

如果设 $f(x)=S_{莞}(x)-S_{蒲}(x)$，在本题中，这也是一个分段函数

$$f(x)=S_{莞}(x)-S_{蒲}(x)$$

$$=\begin{cases}x-3x=-2x & (0\leqslant x<1)\\ 2x-1-\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2} & (1\leqslant x<2)\\ 4x-5-\left(\frac{3}{4}x+3\right)=\frac{13}{4}x-8 & (2\leqslant x<3)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\end{cases}$$

其图像如图 28-2 所示，通过两次试验：

第一次取值 $x_1$，得不足 $-y_1=-f(x_1)$（注意：不足用

负数表示）

第二次取值 $x_2$，得盈 $y_2=f(x_2)$。

不管曲线是什么样子，我们得到其上两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$

用两点式求 $P_1P_2$ 的方程

$$\frac{y+y_1}{x-x_1}=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}$$

所以 $y=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)-y_1$

蒲莞同高时 $y=0$，即

$$(y_2+y_1)(x-x_1)-y_1(x_2-x_1)=0$$

$$(y_1+y_2)x=x_1y_2+x_2y_1$$

所以 $x=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}$

从图 28-2 上可以清楚地看出，如果 $f(x)$ 是一个二次以上的或其他不明关系的函数式，$P_1P_2$ 和 $x$ 轴交点的横坐标 $x$ 就是 $f(x)=0$ 在区间 $(x_1, x_2)$ 的近似根。这就是世界上最早的“弦位法”求近似根的思想。

**读读练练** **练　习　题**

1.　粮长奖工

今有粮长奖劳工　不分老幼喝名呼

每人七个少三个　五个却少四十五

答曰：二十一人　钱一百五十文

选自《算法统宗》

注：本题文字略有改动

2. 今有人共买金，人出四百，盈三千四百；人出三百，盈一百。问人数、金价各几何？

答曰：三十三人，金价九千八百

提示：注意相反方向量的应用

3. 今有垣高九尺。瓜生其上，蔓日长七寸。瓠生其下，蔓日长一尺。问几何日相逢？瓜、瓠各长几何？

答曰：五日十七分日之五。瓜长三尺七寸一十七分寸之一。瓠长五尺二寸一十七分寸之十六。

术曰：假令五日，不足五寸；令之六日，有余一尺七寸半。

选自《九章算术》

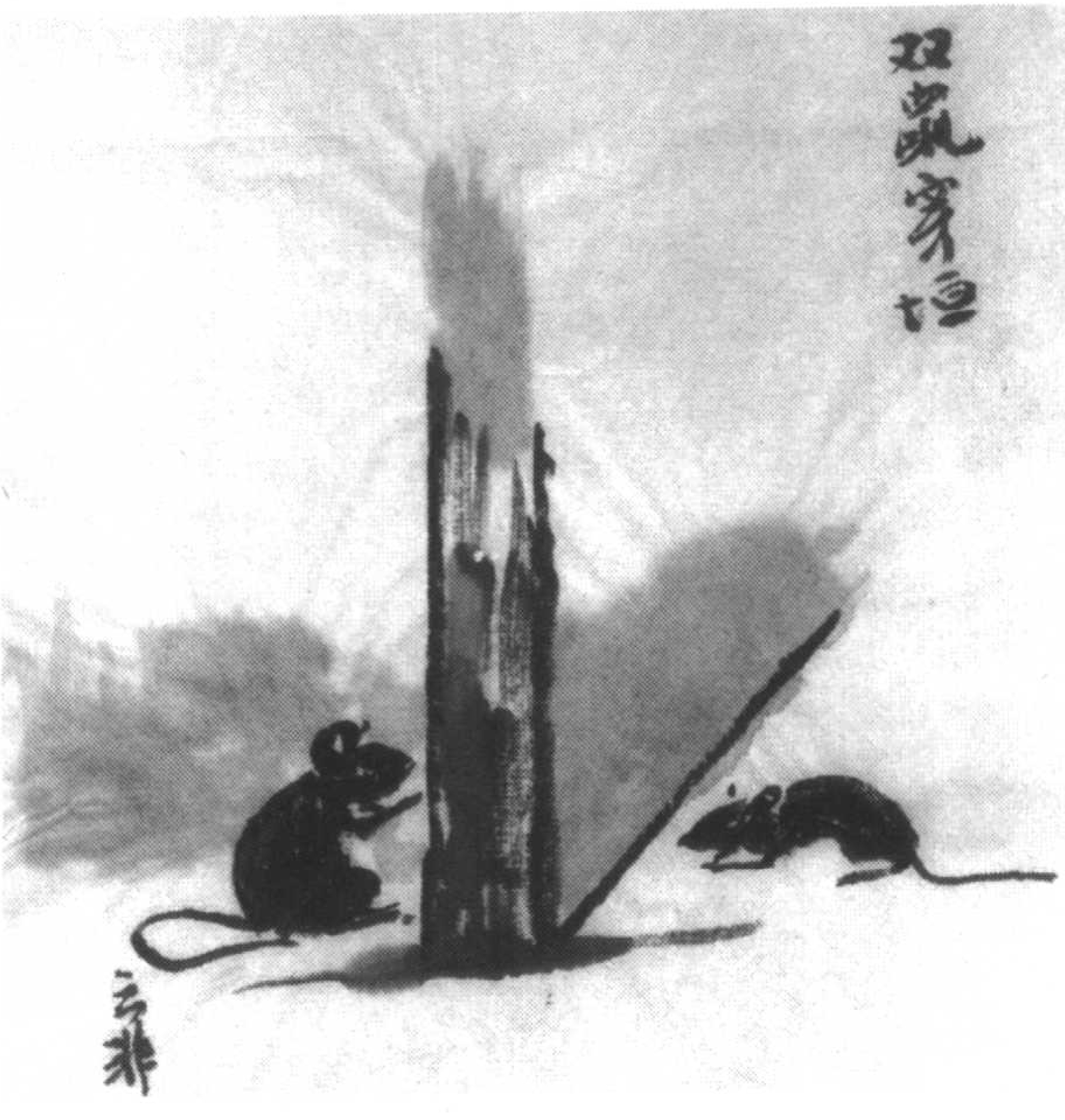
# 29 双鼠穿垣

今有垣厚五尺，两鼠对穿。大鼠日一尺，小鼠亦日一尺。大鼠日自倍，小鼠日自半。问几何日相逢？各穿几何？

答曰：二日一十七分日之二。大鼠穿三尺四寸十七分寸之十二。小鼠一尺五寸十七分寸之五

术曰：假令二日，不足五寸；令之三日，有余三尺七寸半

选自《九章算术》



**解法1** 中算古法

本题题意清楚，无需今译。请读者按“盈不足术”的程序与格式，自行演算。

**解法 2** 分段函数法

我们仿照“蒲莞同高”的思路来分析“双鼠穿垣”的函数关系。

如图（29-1），设有数轴 $Ox$，线段 $OA=5$ 表示墙厚，大鼠从 $O$ 出发，沿 $OA$ 的方向，小鼠从点 $A$ 出发，沿 $AO$ 的方向，相向而穿。

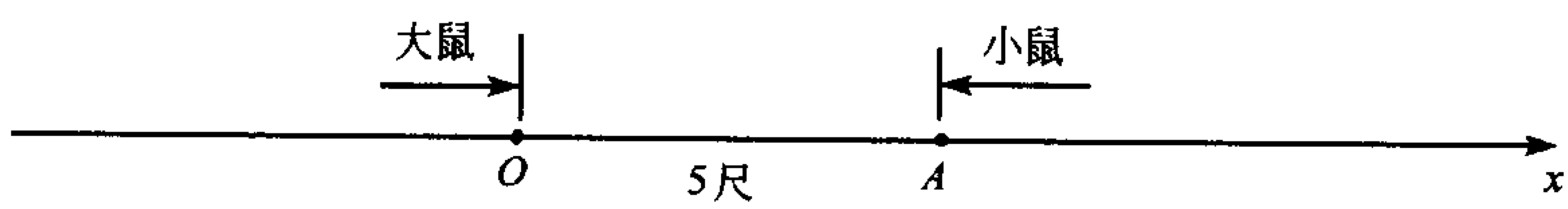



图 29-1

设 $x$ 为日数，$v_{大}(x)$，$v_{小}(x)$ 和 $S_{大}(x)$，$S_{小}(x)$ 分别表示大、小鼠的速度和穿进的距离，则

$$v_{大}(x)=\begin{cases}1 & (0\leqslant x<1)\\ 2 & (1\leqslant x<2)\\ 2^2 & (2\leqslant x<3)\\ \cdots\cdots\end{cases}\qquad v_{小}(x)=\begin{cases}1 & (0\leqslant x<1)\\ 1\times\dfrac{1}{2} & (1\leqslant x<2)\\ 1\times\dfrac{1}{2^2} & (2\leqslant x<3)\\ \cdots\cdots\end{cases}$$

$$S_{大}(x)=\begin{cases}x & (0\leqslant x<1)\\ 1+2(x-1)=2x-1 & (1\leqslant x<2)\\ 1+2+4(x-2)=4x-5 & (2\leqslant x<3)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\end{cases}$$

$$S_{小}(x)=\begin{cases}5-x & (0\leqslant x<1)\\ 5-\left[1+\frac{1}{2}(x-1)\right]=4\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x & (1\leqslant x<2)\\ 5-\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(x-2)\right]=4-\frac{1}{4}x & (2\leqslant x<3)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\end{cases}$$

根据二次试验的结果，

$x=2$ 时，不足 5 寸，$x=3$ 时，盈 1 尺 $5\frac{5}{17}$寸，故二鼠相会于（2，3）日之间，由分段函数知（图 29-2）

$$4x-5=4-\frac{1}{4}x$$

所以

$$x=\frac{36}{17}=2\frac{2}{17}\text{（日）}$$

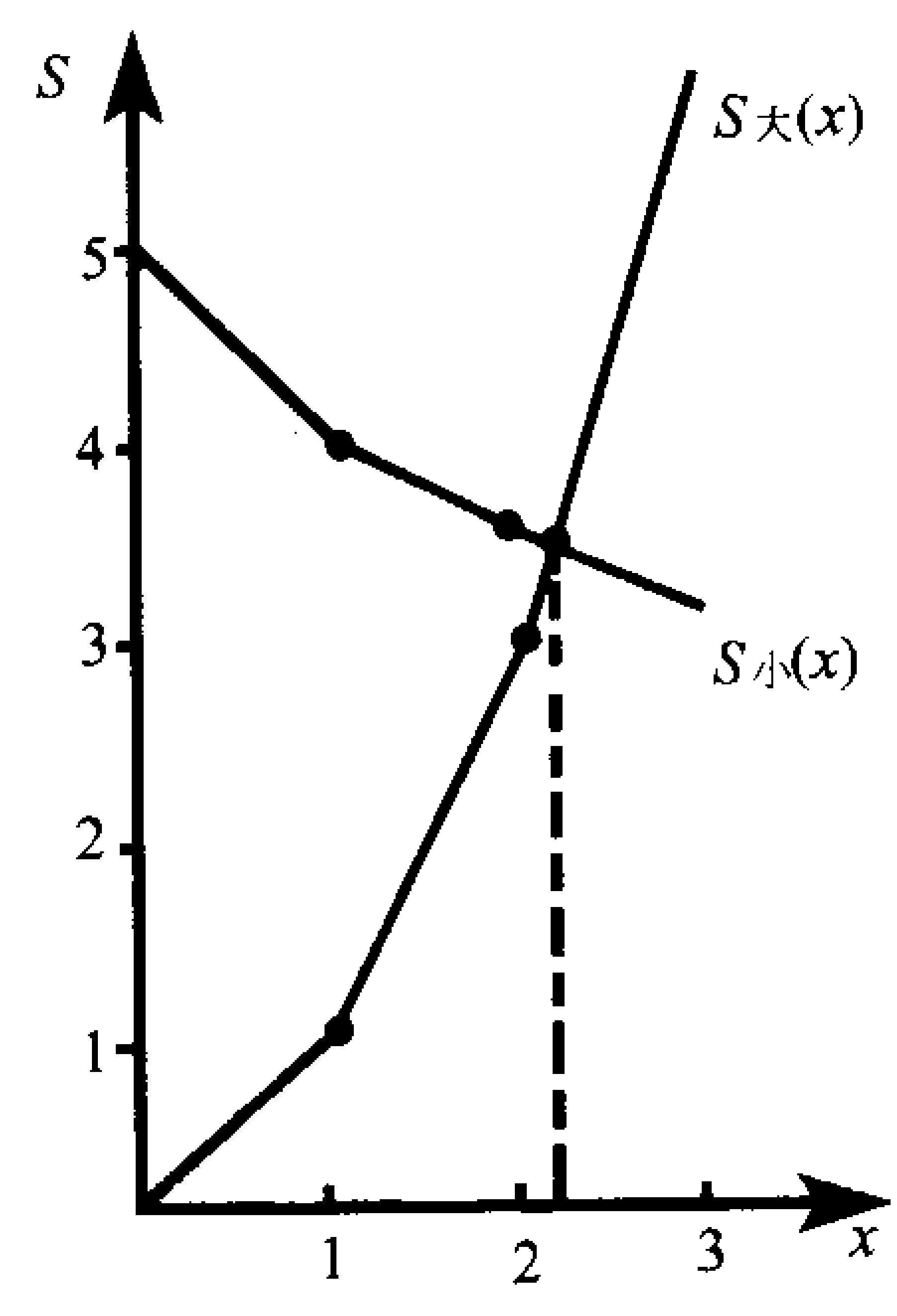



图 29-2

大鼠穿墙

$$S_{大}\left(\frac{36}{17}\right)=4\times\frac{36}{17}-5=3\frac{8}{17}=3+\frac{68}{170}+\frac{12}{170}=3+\frac{4}{10}+\frac{12}{17}\times\frac{1}{10}$$

故得大鼠穿三尺四寸十七分寸之十二，小鼠穿一尺五寸十七分

寸之五。

## 古为今用　盈不足术的应用与探究

丰富的生活内容和繁杂的自然、社会现象，给数学带来了许多难以解决的应用问题。古代数学家就力图寻求一把“万能的钥匙”来开各种不同结构的锁。“盈不足术”在当时的确是一个了不起的成果，它不仅给出了线性问题的精确解和非线性问题的近似解，在那个时代可以算是“万能”的了，而且在数学思想上给人们一个重要的启迪，就是数学模型化的思想。它将各种复杂的数量关系，分析化归为特定的数学模型，把“隐杂互见”的难题的解法做到模型化、程序化。这一思想影响深远，“方程”模型的产生，可以说是这一思想发展的产物。

下面就“数列”方面的几个题说一说“盈不足术”的今用和引起的一些争议，希望读者探究。

2003 年上海高考数学试卷中有这样一道题：

**例 1**　方程 $x^3+\lg x=18$ 的根 $x\approx$__。(结果精确到 0.1)

在《九章》时代，对数远未发现，不可能出现这样的题目。如果“盈不足术”可解，就充分说明它的“万能”作用，也表明此法的实用价值。因为上海准许使用计算器，本题按盈不足法则用计算器辅助计算。

设 $x=2$，则

$$2^3+\lg 2-18=-9.70 \quad (\text{不足})$$

$x=3$，则

$$3^3+\lg 3-18=9.48\ (\text{盈})$$

代入盈不足公式得

$$x=\frac{2\times 9.48+3\times 9.70}{9.48+9.70}\approx 2.51$$

原题的标准答案是 $x=2.6$，精度不够。如果再算一次，就可以提高精度。

设 $x=2.5$，则

$$2.5^3+\lg 2.5-18=-1.98 \quad （不足）$$

这时

$$x=\frac{2.5\times 9.48+3\times 1.98}{9.48+1.98}=2.586\approx 2.6$$

实际上这就是弦位法求近似根。

**例 2** 今有良马与驽马发长安至齐。齐去长安三千里。良马初日行一百九十三里，日增一十三里。驽马初日行九十七里，日减半里。良马先至齐，复还迎驽马。问几何日相逢及各行几何?

答曰：一十五日一百九十一分日之一百三十五而相逢。良马行四千五百三十四里一百九十一分里之四十六。驽马行一千四百六十五里一百九十一分里之一百四十五。

术曰：假令十五日，不足三百三十七里半。令之十六日，多一百四十里。以盈不足维乘假令之数，并而为实。并盈不足为法。实如法而一，得日数。不尽者，以等数除之而命分。

选自《九章算术》

**解法 1** 中算古法

本题不再译解，请读者按盈不足术，自行计算。

**解法 2** 等差数列

这是一则和中学等差数列知识密切结合的习题，很值得练习与研究。

良马、劣马每日的速率均成等差数列。设良马第一日的速

率为 $a_1=193$ 里，公差 $d=13$ 里；劣马第一日的速率为 $a'=97$ 里，公差 $d'=-0.5$ 里

利用公式：$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$

（刘徽在注解中已经指明了这个公式）求良马和劣马的行程。

良马 15 日行程：

$15\times193+15\times14\times13\div2=2895+1365=4260$（里）

劣马 15 日行程：

$15\times97+15\times14\times(-0.5)\div2=1455-52.5=1402.5$（里）

不足：$6000-4260-1402.5=337.5$（里）

良马 16 日行程：

$16\times193+16\times15\times13\div2=3088+1560=4648$（里）

劣马 16 日行程：

$16\times97+16\times15\times(-0.5)\div2=1552-60=1492$（里）

盈余：$4648+1492-6000=140$（里）

现在只要求 15 日后两马相遇的时间就行了。这时两马的距离是 337.5 里，用等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 求：

良马第 16 日的速率是：$193+15\times13=388$（里/日）

劣马第 16 日的速率是：$97+15\times(-0.5)=89.5$（里/日）

二马的速率和为：$388+89.5=477.5$（里/日）

故二马在第 16 日相遇的时间为：

$$t=\frac{337.5}{477.5}=\frac{135}{191}\text{（日）}$$

总计，良马行程为：　$4260+388\times\frac{135}{191}=4534\frac{46}{191}$（里）

劣马行程： $1402.5+89.5\times\frac{135}{191}=1465\frac{145}{191}$（里）

在近几年高中复习时也常常有这样的试题出现。

**例3** $A$，$B$ 两人以相距32千米的两地同时相向出发，$A$ 以匀速4千米/小时前进，$B$ 以第一小时2千米/小时的速度匀速前进，第二小时以2.5千米/小时的速度匀速前进，……第 $k$ 小时以 $2+0.5(k-1)$ 千米/小时的速度匀速前进，……，则 $A$、$B$ 相遇历时多少小时？

**解法1** 等差数列

设 $A$、$B$ 相遇前所走过的整时数为 $t$，则

$$4t+\left[2t+\frac{t(t-1)}{2}\times\frac{1}{2}\right]\leqslant 32<4(t+1)+\left[2(t+1)+\frac{t(t+1)}{2}\frac{1}{2}\right]\quad(t\in N)$$

解得

$t=4$

4小时后，两人共走了27千米，这时 $A$ 时速仍为4千米/小时，$B$ 时速为4千米/小时，在这个路段上相会，需时 $\frac{5}{4+4}=\frac{5}{8}$，总共需时 $4\frac{5}{8}$ 小时。

**解法2** 盈不足术

假设 $t=4$ 则

$4\times4+(2+2.5+3+3.5)=27$ 不足5

$t=5$ 则

$4\times5+(2+2.5+3+3.5+4)=35$ 盈3

由盈不足法则得

$$t=\frac{4\times3+5\times5}{5+3}=4\frac{5}{8}\ (小时)$$

请读者想一想，如果直接解方程求 $t$

$$4t+\left[2t+\frac{t\ (t-1)}{2}\times\frac{1}{2}\right]=32$$

其结果是否一致？为什么？

从上面几个例题可以看出，盈不足术就是在今天解有些题目还是很方便的。但在历史上对有些题的解法有争议，现介绍一点，请大家探究。我们的观点是：(1) 要注意《九章》的时代背景，当时许多数学理论还没有产生，要用历史的眼光来分析问题；(2) 要注意盈不足术的使用条件，把“形”和“数”结合起来，理解它化非线性为线性的处理方法。

对“双鼠穿垣”题，清末蔡毅提出另一解法（蔡毅《同文馆课艺》）。

设 $x$ 日后两鼠相遇，则

大鼠穿进

$$1+2+2^2+\cdots+2^{x-1}=2^x-1$$

小鼠穿进

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{x-1}}=2-\frac{1}{2^{x-1}}$$

由

$$2^x-1+2-\frac{1}{2^{x-1}}=5$$

即

$$2^{2x}-4\times 2^x-2=0 \qquad 2^x=2+\sqrt{6}$$

所以 $x=\dfrac{\lg\ (2+\sqrt{6})}{\lg 2}\neq 2\dfrac{2}{17}$

请你对蔡毅的解答做出分析和评价。

对于例 2，如果直接用等差数列解，两马共行 6000 里，

两马的速率和仍然是等差数列。其中，$a_1 = 193 + 97 = 290$，$d = 13 - 0.5 = 12.5$。设 $x$ 日相遇，则 $S_x = 6000$，

$$290x + \frac{x(x-1)}{2} \times 12.5 = 6000$$

$$5x^2 + 227x - 4800 = 0$$

所以 $x = \dfrac{\sqrt{147529} - 227}{10} \approx 15.71 \neq 15\dfrac{135}{191} \approx 15.7068$

有人说《九章》的结果是近似解，上面的结果是精确解，你以为如何?

**读读练练**

## 练 习 题

1. 三公开店

我问开店李三公　众客都来到店中
一房七客多七客　一房九客一房空
答曰：房八间，客六十三人

2. 牧童分竹

林下牧童闹如簇　不知人数不知竹
每人六竿多十四　每人八竿恰齐足
答曰：七人，竹五十六竿

选自《算法统宗》

# 30 雉兔同笼

今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足。问鸡兔各几何

答曰：雉二十三，兔一十二

选自《孙子算经》



这是一道在民间流传极广的算术题。古人希望学生们能用心算直接报出答案来。下面我们介绍2种解法。

**解法1** 二元一次方程组

设雉有 $x$ 只，兔有 $y$ 只，依题意列方程组

$$\begin{cases} x+y=35 & (30\text{-}1) \\ 2x+4y=94 & (30\text{-}2) \end{cases}$$

(30-2) ÷2：

$$x+2y=47 \qquad (30\text{-}3)$$

(30-3) －(30-1)：

$$y=12\text{（只）}$$

代入(30-1)得

$$x=23\text{（只）}$$

**解法2** 算术方法

给笼中的雉（即野鸡）和兔下一道命令："野鸡独立，兔子举手，"这时，地面还有多少只脚？

$$94\div2=47\text{（只）}$$

让头和脚建立对应关系：雉1头→1足，兔1头→2足，所以兔子的个数是

$$47-35=12\text{（只）}$$

雉的个数是

$$35-12=23\text{（只）}$$

合成总算式

$$\text{兔数}=\text{足数}\div2-\text{头数}=94\div2-35=12\text{（只）}$$

$$\text{雉数}=\text{头数}-\text{兔数}=35-12=23\text{（只）}$$

只要会用"金鸡独立，兔子举手"这个命令，连幼儿园的小朋友都能心算这道题。

其实这个方法里还孕育着一个重要的数学思想，即集合对应的思想。现在在小学的教材里就注意引导和渗透了。本题中，命令下达以后，鸡头和鸡足是 1 对 1，即“1→1”，兔头和兔足是“1→2”，所以足数 - 头数 = 兔数。这样，本题就可以成为茶余饭后的谈资了。

## 古法探源　我国古代的方程理论

“雉兔同笼”题导出了二元一次方程组解应用题的实例。其实，我国古代数学家对“线性方程组问题”提出了一整套的理论和方法，在世界数学史上取得了具有划时代意义的伟大成就。是“今有术”和“盈不足术”的发展，为应用题的解法又开辟了一条新路。

先举一例来说明我国传统意义下的方程概念和解法。

**例 1**　今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗，问上、中、下禾实一秉各几何?

答曰：上禾一秉九斗四分斗之一，中禾一秉四斗四分斗之一，下禾一秉二斗四分斗之三。

选自《九章算术》

这是一则简单的三元一次方程组题，意思是已知上等禾 3 捆，中等禾 2 捆，下等禾 1 捆，共打出粮食 39 斗；上等禾 2 捆，中等禾 3 捆，下等禾 1 捆，共打出粮食 34 斗；上等禾 1 捆，中等禾 2 捆，下等禾 3 捆共打出粮食 26 斗，问上、中、下等禾每捆可打出多少粮食?

像这样的应用题，品类繁多，各有定数并且各类的总和也知道，刘徽称这类问题是“群物总杂，各列有数，总言其实。”处理的方法是“令每行为率，二物者再程，三物者三程，皆如物数程之。并列为行，故谓之方程。”就是说，把这些数按类别一行一行地列出来，有几个未知数就排上几列，各列称为“率”，是可以按比例扩大缩小的，而“程”有比较、试验之意。刘徽把这样的数字方阵叫“方程”，和现在说的“含未知数的等式”有些区别，根据这样的思想，方程的求解就可按步实施了。

$$
\begin{array}{c} \\ \text{上} \\ \text{中} \\ \text{下} \\ \text{实} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{左} & \text{中} & \text{右} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} \end{array}
\xrightarrow{\text{中}\times 3}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{左} & \text{中} & \text{右} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{pmatrix} \end{array}
\xrightarrow{\text{中}-\text{右}\times 2}
$$

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{左} & \text{中} & \text{右} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{pmatrix} \end{array}
\xrightarrow{\text{左}\times 3}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{左} & \text{中} & \text{右} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \\ 78 & 24 & 39 \end{pmatrix} \end{array}
\xrightarrow{\text{左}-\text{右}}
$$

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{左} & \text{中} & \text{右} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix} \end{array}
\xrightarrow{\text{左}\times 5}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{左} & \text{中} & \text{右} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{pmatrix} \end{array}
\xrightarrow{\text{左}-\text{中}\times 4}
$$

左　　中　　右

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

经过这样一系列的变换，最后一个方阵的实际意义是：

$$\begin{cases} \text{下禾 36 秉，实 99 斤；} \\ \text{中禾 5 秉，下禾 1 秉，实 24 斤；} \\ \text{上禾 3 秉，中禾 2 秉，下禾 1 秉，实 39 斤。} \end{cases}$$

很容易用代入法求得

下禾 1 秉，实是

$$\frac{99}{36}=2\frac{3}{4}\ (\text{斗})$$

中禾 1 秉，实是

$$\frac{24-2\frac{3}{4}}{5}=\frac{96-11}{20}=\frac{17}{4}=4\frac{1}{4}\ (\text{斗})$$

上禾 1 秉，实是

$$\frac{39-2\times\frac{17}{4}-\frac{11}{4}}{3}=\frac{156-45}{12}=\frac{37}{4}=9\frac{1}{4}\ (\text{斗})$$

由于古代中文是直行书写，这种格式颇不习惯，改为横行，就和我们现在学习的一次方程组的消去法完全一致了。

**例 2**　还以“雉兔同笼”为例，用现代的形式练习一下消去法。

解方程组

$$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}$$

**解** 列出矩阵

$$\begin{array}{l}上\\下\end{array}\begin{pmatrix}1 & 1 & 35\\2 & 4 & 94\end{pmatrix}\xrightarrow{下\div 2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 35\\1 & 2 & 47\end{pmatrix}\xrightarrow{下-上}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 35\\0 & 1 & 12\end{pmatrix}\xrightarrow{上-下}\begin{pmatrix}1 & 0 & 23\\0 & 1 & 12\end{pmatrix}$$

显然得到 兔 12 只，雉 23 只。

**例 3** 解方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6\\x_1+2x_2-x_3=2\\2x_1-3x_2+x_3=-1\end{cases}$$

**解** 把方程组的系数列成矩阵

$$\begin{array}{l}上\\中\\下\end{array}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 6\\1 & 2 & -1 & 2\\2 & -3 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{中-上}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 6\\0 & 1 & -2 & -4\\2 & -3 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{下-上\times 2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 6\\0 & 1 & -2 & -4\\0 & -5 & -1 & -13\end{pmatrix}\xrightarrow{下+中\times 5}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 6\\0 & 1 & -2 & -4\\0 & 0 & -11 & -33\end{pmatrix}\xrightarrow{下\div(-11)}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 6\\0 & 1 & -2 & -4\\0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{中+下\times 2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 6\\0 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{上-中-下}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

所以 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3$。

读读练练

## 练 习 题

1. 今有兽六首四足，禽四首二足。上有七十六首，下有四十六足，问禽兽各几何？

答曰：八兽七禽

2. 争强斗胜

八臂一头号夜叉　三头六臂是哪吒　两处争强来斗胜
不相胜负正交加　三十六头齐出动　一百八手乱相抓
傍边看者殷勤问　几个哪吒几夜叉

答曰：8 夜叉，30 哪吒

选自《九章算法比类大全》

3. 三足团鱼六眼龟　共同山下一深池　九十三足乱浮水
一百二眼将人窥　或出没　往东西　倚栏观看不能知
有人算得无差错　好酒重斟赠数杯

答曰：团鱼一十五个　龟一十二个

选自《算法统宗》

# 31 物不知数

**今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何**

**答曰：二十三**

选自《孙子算经》



今有一堆物品，不知是多少个，每三个、三个数，最后余二个，每五个五个数，最后余三个，每七个七个数，最后余二个，问这堆物品共有多少个？

孙子算经给出的算法是这样的：

术曰：三三数之剩二，置一百四十；五五数之剩三，置六十三；七七数之剩二，置三十。以二百一十减之即得。

凡三三数之剩一，则置七十；五五数之剩一，则置二十一；七七数之剩一，则置十五。一百六以上，以一百五减之即得。

## 古法探源　从“物不知数”谈起

这是一道驰名中外的古题，它虽然从简单的数物记数开始，却广泛应用于天文、历法、军事、工程，引起了后世极大的兴趣，开创了世界“同余式论”研究的先河。在我国此题几乎家喻户晓，有人称此法为“韩信点兵”，也有人称为“秦王暗点兵”、“鬼谷算”、“隔墙算”等，并将解题方法改为隐语诗歌，启示读者去思考其中的奥秘。说得比较清楚一点的是程大位在《算法统宗》里的诗，现录于后，请读者细细品味此题的解法。

三人同行七十稀　五数梅花廿一枝
七子团员正月半　除百零五便得知

用现代通用的数学语言来说，就是求一个数，同时满足被 3 除余 2，被 5 除余 3，被 7 除余 2 这三个条件。

解题的思路也十分明确，从构造上来剖析答案的构成可以用下式表示：

答数 = 被3除余2，且是5和7的倍数 + 被5除余3，且是3和5的倍数 + 被7除余2，且是3和5的倍数 − 3，5，7的最小公倍数 = 140 + 63 + 30 − 210 = 23

为了寻求解决这类题目的一般规律，我国古代数学家认为“求一”是难点和关键所在，即要找“被3除余2，并且是5和7的倍数”的数，首先要找“被3除余1，并且是5和7的倍数”；要找“被5除余2，并且是3和7的倍数”，先要找“被5除余1，并且是3和7的倍数”，…。下面就讲一讲计算的方法。

因为 $5 \times 7 = 35$，$35 \div 3 = 11$ 余 2，不合条件，而 $2 \times 35 = 70$ 符合条件，所以“三三数之剩一，则置70”其缘由在此。同理“五五数之剩1，则置21”“七七数之剩1，则置15”。而原题条件的余数是2，3，2，所以把70，21，15扩大相应的倍数然后相加即得

$$2 \times 70 + 3 \times 21 + 2 \times 15 = 233$$

为了求得适合条件的最小解，连减 $3 \times 5 \times 7 = 105$ 得

$$233 - 210 = 23$$

程大位的解题秘诀就暗示了解题的规律。

三人同行七十稀——被3除余1，并且是5和7的倍数的数是70；

五树梅花廿一枝——被5除余1，并且是3和7的倍数的数是21；

七子团员正月半——被7除余1，并且是3和5的倍数的数是15；

除百零五便得知——减去3、5、7的最小公倍数105。

我国古代数学具有构造性和机械化的特点，并且“寓理于算，不证自明”，从这个题目就看得很清楚了。但是，做到“不证自明”还要花一番大力气，这也正是启迪智慧、训练能力的难遇良机。

宋人周密（1232—1298）对术文另作一首隐语诗（鬼谷算）：

三岁孩儿七十稀，五留廿一事尤奇，

七度上元重相会，寒食清明便得知。

诗中隐含一些典故，增加了破译的难度，这里“上元”指正月十五，暗示 15。寒食节是清明前一天，相传是晋文公为了悼念介子推抱木焚死之日，而规定这一天“禁火寒食”。从冬至到寒食恰 105 天，暗示数字 105。

## 中算典籍　　《孙子算经》

《孙子算经》是我国一部较为普及的数学著作，选题浅近易晓，适合于教学。全书分上、中、下三卷，上卷叙述度量衡制度，筹算记数和乘除算法；卷中是筹算分数算法和开平方法，是记叙筹算制度和算法的较好的教材；卷下是各种应用问题，包含有市场交易、田亩、仓储、测望乃至军旅等 46 个。

《孙子算经》的作者和编纂年代没有确切的记载，有人认为它出于战国初期写《孙子兵法》的孙武之手，休宁戴震根据书中内容，断定它不是孙武的原著。从算题的内容和历史背景来分析，成书大约在公元 4、5 世纪。

从内容特色来看，它以实际应用为先，注重计算技术，题目通俗有趣，解法巧妙简便，在我国古代数学教育的启蒙读物

中，是很有代表性的一种。本书将有重点地选择一些题目作详细的分析解答。

《孙子算经》通过“物不知数”题，最早记叙了举世闻名的“中国剩余定理”，这也是它成为流传千古的数学典籍的原因之一。

**读读练练**

## 练 习 题

太平莲灯

天下太平莲盏灯　元宵庆贺满城行
街前街后看不厌　次将五数四盏剩
盏如七数只存六　满目红光闹盈盈
三数算尽不必下　五数一剩二十一
剩四当下八十四　七数一剩一十五
剩六当下九十零　三并共下百七四
减满法去一百五　余得莲灯六十九

选自谭文《数学寻源》

本题是在“物不知数”的影响下编拟的算题，题目和解答混在一起，实质就是解同余式组 $x \equiv 0 \pmod{3} \equiv 4 \pmod{5} \equiv 6 \pmod{7}$。请读者试解。

# 32 古算摘奇

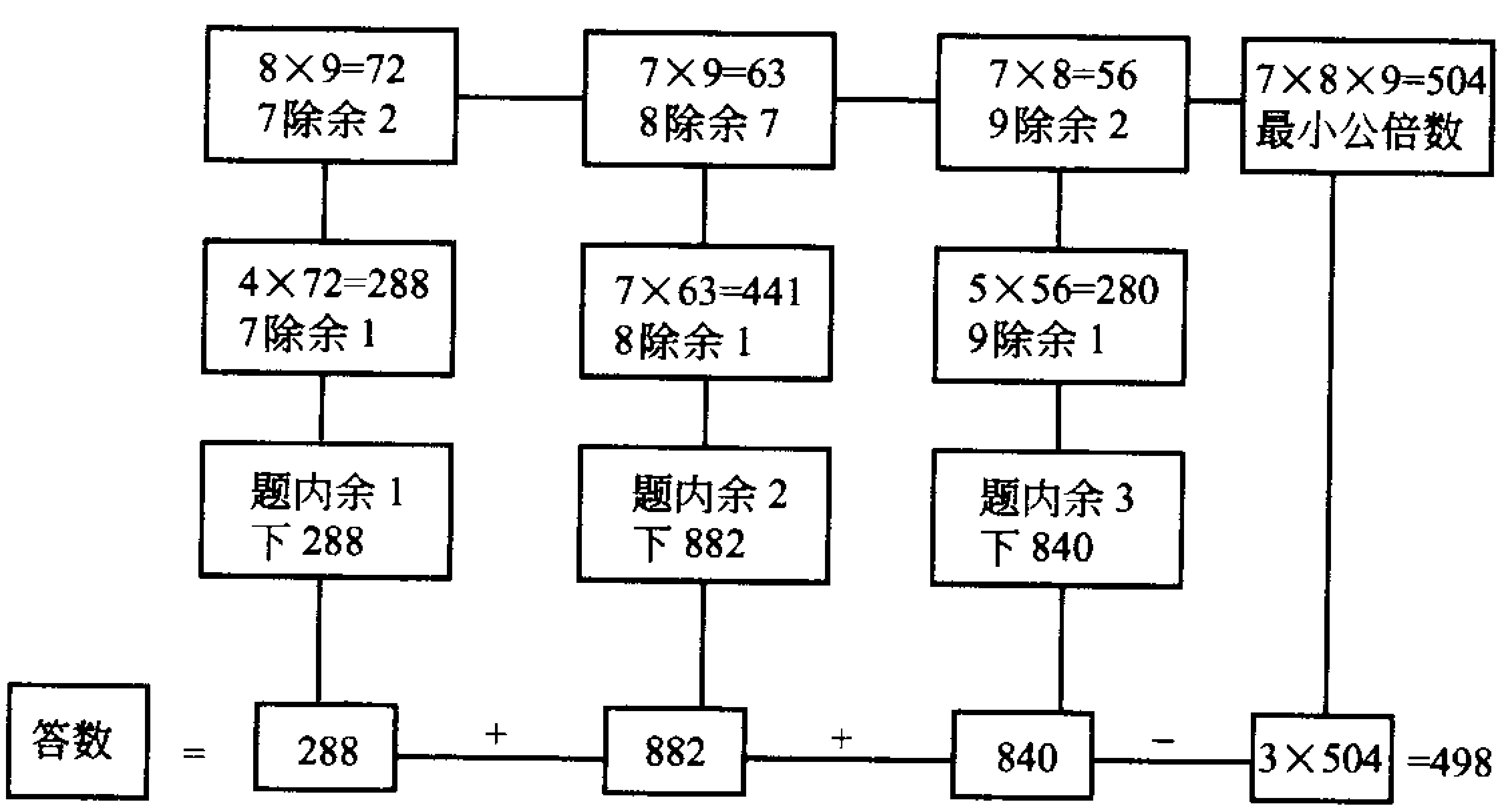
**七数剩一，八数剩二，九数剩三，问本总数几何？**

**答曰：四百九十八**

选自《续古摘奇算法》

**术曰：七余一，下二百八十八，题内余一，下二百八十八；八余二，下四百四十一，题内余二，下八百八十二；九余一，下二百八十，题内余三，下八百四十。并之，二千一十，满五百四去之，去三个五百四，余四百九十八，合问。**

按前文所说的方法，剖析杨辉之术，逐步演算，并注意归纳总结找出解此类题的一般规律（参看“二谈物不知数”）。



## 古法探源　　二谈“物不知数”

《孙子算经》中“物不知数”题可谓世界名题，提出后引起后世极大的兴趣。简单的题，老人、小孩都能解决，深入的理论研究却十分困难。宋人秦九韶，清人焦循、黄宗宪等几代人几百年的努力，终于找到了一般的解法，取得了举世公认的成果。正因为此，我们将从浅谈起，逐步深入，本讲不用任何高深理论，在已有的算术基础上，讲清解题的思路和方法，初步掌握先辈们的研究成果。

就“物不知数”题来说，总的解题思路分三步：

1. 先求最小公倍数

先求 3 个数 3，5，7 的最小公倍数 $M$。因为 3，5，7 两两互质，即

$$(3,\ 5)=(5,\ 7)=(3,\ 7)=1$$

所以 $M=[3,\ 5,\ 7]=3\times5\times7=105$

$M$ 的任何整数倍都能被 3，5，7 整除，增加或减少若干个 $M$，对余数不发生影响。

2. 分堆求一

因为原题要求 3 个条件同时成立，我们采取“各个击破”的办法，抓住一个条件，兼顾其他条件，分堆数物，逐条解决。

第一堆，物品数要满足“被 3 除余 1，但同时是 5 和 7 的倍数”，这样就可以排除 5 和 7 的干扰。

因为 5 和 7 的最小公倍数是 $M_1=[5,\ 7]=35$，这个数古书上叫衍数，它和 $M$ 的关系是

$$M_1=\frac{M}{3}=\frac{[3,\ 5,\ 7]}{3}=35$$

35 是 5 和 7 的倍数，但被 3 除余 2，若按题目要求，正好是“三三数之余二”，为了找出解这类题的一般规律，坚持“求一”的要求，即找一个数 $M'_1$，古算书上称它为乘率，使 $M'_1M_1$ 被 3 除余 1，所以乘率

$$M'_1=2$$

这样，$2M_1=70$ 既是 5 和 7 的倍数，又被 3 除余 1，“三人同行七十稀”就是这个道理。

第二堆物品的数量应是 3 和 7 的倍数，但被 5 除余 1。

衍数 $M_2=\frac{M}{5}=$ ［3，7］$=21$，　而 $21\div5=4$ 余 1，所以乘率 $M'_2=1$

所以有“五数梅花廿一枝”。

同理，第三堆物品数是 3 和 5 的倍数，但被 7 除余 1，

衍数　$M_3=\frac{M}{7}=$ ［3，5］$=15$，乘率 $M'_3=1$，

即“七子团圆正月半”。

3．乘余汇总

因为原题中“三数余二”，而 $M'_1M_1=70$，只是“三除余 1”必须用余数 2 来乘，即 $2M'_1M_1=2\times2\times35=140$ 才符合题目第 1 条的要求。

5 除余 3，7 除余 2，也作同样处理。

汇总所求各数

$$2M'_1M_1+3M'_2M_2+2M'_3M_3=2\times70+3\times21+2\times15=233$$

就得到符合条件的物之总数，但它不是最小解，连减 $M=3\times5\times7=105$ 不影响本题的要求，直到小于 105 为止。这样

$$233-2\times105=23$$

为最小解。

下面我们解本节“古算摘奇”题。

**例 1** 七数剩一，八数剩一，九数剩三，问本总数。

**解** 先求最小公倍数

$$M=[7,\ 8,\ 9]=7\times8\times9=504$$

衍数

$$M_1=\frac{M}{7}=8\times9=72$$

因为 $72\div7=10$ 余 2，

找 $M'_1$ 使 $2M'_1$ 被 7 除余 1，显然，乘率 $M'_1=4$；

同理，衍数

$$M_2=\frac{M}{8}=7\times9=63$$

因为 $63\div8=7$ 余 7，

找 $M'_2$ 使 $7M'_2$ 被 8 除余 1，在数字不大的情况下，可以进行估算，求得乘率 $M'_2=7$；

衍数 $M_3=56$，乘率 $M'_3=5$。

乘余汇总

$1\times M'_1M_1+1\times M'_2M_2+3\times M'_3M_3=1569$

减去 $3M$ 得最小数 57。

**例 2** 十一数余三，十二数余二，十三数余一，问本数。

**解** $M=[11,\ 12,\ 13]=1716$，$M_1=\dfrac{M}{11}=156$，$M'_1=6$

$M_2=\dfrac{M}{12}=143$，$M'_2=11$；$M_3=\dfrac{M}{13}=132$，$M'_3=7$

所求数为 $3M'_1M_1+2M'_2M_2+M'_3M_3=6878=4\times1716+14$，最小数为 14。

在解题过程中，乘率 $M'_i$ 多少都是估算的，后面在“大衍求一术”中将介绍一般的求法。

读读练练

## 练 习 题

二数余一，五数余二，七数余三，九数余四，问原总数几何？

答曰：157

选自《续古摘奇算法》

# 33 韩信点兵

**有兵一队，若列成五行纵队，末行一人；成六行纵队，则末行五人；成七行纵队，则末行四人；成十一行纵队，则末行十人。求兵数。**

选自陈景润《初等数论》

韩信是汉朝的名将，江苏淮阴人。楚汉战争时，辅佐刘邦战败项羽，立下了汗马功劳。人们常说“韩信用兵，多多益善”。有记载说韩信统率大军，在册兵员 26641 人，部队集合后，他只要求按 1～3，1～5，1～7 报数，从每次报数的余数就可知道实到的人数（还要有一个上界），这就是韩信点兵问题。本题是通过列队变形，从五行、六行、七行、十一行的余数，来计算兵数。通常人们也把《孙子算经》中的“物不知数”题叫“韩信点兵”。

本题的数学表述是：某数被 5 除余 1，被 6 除余 5，被 7 除余 4，被 11 除余 10，求此数。

**解** 先求最小公倍数

$M=[5,6,7,11]=5\times6\times7\times11=2310$

求衍数和乘率

$M_1=\frac{M}{5}=6\times7\times11=462$，$M'_1=3$

$M_2 = \frac{M}{6} = 5 \times 7 \times 11 = 385$, $M'_2 = 1$

$M_3 = \frac{M}{7} = 5 \times 6 \times 11 = 330$, $M'_3 = 1$

$M_4 = \frac{M}{11} = 5 \times 6 \times 7$, $M'_4 = 1$

乘余汇总

$1 \times M'_1 M_1 + 5 \times M'_2 M_2 + 4 \times M'_3 M_3 + 10 \times M'_4 M_4 = 6731 = 2111 + 2 \times 2310$

兵数至少为 2111 人。

下面用列表（表 33-1）的形式把解答表示出来，这样就比较接近现代数论书中的表达方式了。

**表 33-1　韩信点兵**

| 除数 | 余数 | 最小公倍数 | 衍数 | 乘率 | 各总 | 答数 | 最小答数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 5×6×7×11=2310 | 6×7×11=462 | 3 | 1×3×462=1386 | 1386+1925+1320+2100=6731 | 6731－2×2310=2111 |
| 6 | 5 | | 5×7×11=385 | 1 | 5×1×385=1925 | | |
| 7 | 4 | | 5×6×11=330 | 1 | 4×1×330=1320 | | |
| 11 | 10 | | 5×6×7=210 | 1 | 10×1×210=2100 | | |

## 智慧之光　　孙子定理

人们为了生活，天天都要和数打交道。比如说年、月、日、星期几、几点钟等，但实际应用中不需要这一大串整数，而是被某一个固定的正整数去除所得的余数。像学生们最关心

的是今天是星期几，因为课表是按周排的，而星期几就是用7去除某一个总天数所得的余数。例如，2003年元旦是星期三，那么2004年元旦是星期几呢？由于一年是365天，2003年又不是闰年，用7去除365，余数是1，所以2004年元旦是星期四。"物不知数"就是研究余数的问题，这样，数学里就引进了"同余"的概念。

如果两个整数 $a$，$b$ 被另一个数 $m$ 除，所得的余数相同，我们就称这两个数 $a$、$b$ 关于 $m$ 同余，$m$ 称为模，记以

$$a \equiv b \pmod{m} \qquad (33\text{-}1)$$

上面的例子就可以这样来解决：因为2003年元旦是星期三，而

$$365 \equiv 1 \pmod{7}$$

所以2004年元旦是星期四。

若 $a$，$b$ 关于 $m$ 同余，很显然，它们的差能被 $m$ 整除，即

$$a-b=mt\ (t\text{ 是整数}) \qquad (33\text{-}2)$$

反之也是对的。这就是说（33-1）、（33-2）两式是完全一致的，可以互相代替，数学上叫做等价。

如果 $a$，$b$ 是整数，$m$ 是正整数，$a \not\equiv 0 \pmod{m}$

$$ax \equiv b \pmod{m} \qquad (33\text{-}3)$$

称为关于模 $m$ 的一次同余式．

如果正整数 $x=c$ 满足同余式（33-3），即

$$ac \equiv b \pmod{m}$$

那么，$c$ 叫做同余式（33-3）的解，而且 $x \equiv c \pmod{m}$ 的一切整数都是同余式（33-3）的解。

例如，在"物不知数"中，"三人同行七十稀"就可以用

同余式 $35x\equiv 1 \pmod{3}$ 来表示，$x=2$ 是它的解。因此，$x\equiv 2 \pmod{3}$，即 $x=2, 5, 8, \cdots, 2+3t$，（$t$ 是整数），都是这同余式的解。

由 $k$ 个同余式构成的同余式组

$$\begin{cases} x\equiv b_1 \pmod{m_1} \\ x\equiv b_2 \pmod{m_2} \\ \cdots\cdots \\ x\equiv b_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

如果 $x=c$ 同时满足这 $k$ 个同余式，那么 $c$ 就是这个同余式组的解。

可以证明 $x\equiv c \pmod{m_1 m_2 \cdots m_k}$ 的一切整数都是这个同余式的解。

根据上面介绍的符号，"物不知数"题就是解下面的同余式组

$$\begin{cases} x\equiv 2 \pmod{3} \\ x\equiv 3 \pmod{5} \\ x\equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

《孙子算经》所提供的方法是解一次同余式组的一般方法，解题的关键在于求乘率，用现在的记号就是解 3 个独立的同余式

$$5\times 7\times M'_1\equiv 1 \pmod{3}$$
$$3\times 7\times M'_2\equiv 1 \pmod{5}$$
$$3\times 5\times M'_3\equiv 1 \pmod{7}$$

这也是解一次同余式组的难点所在。

所求数为

$$x\equiv 2M'_1M_1+3M'_2M_2+2M'_3M_3 \pmod{3\times 5\times 7} \equiv 23 \pmod{105}$$

现将解题过程列表 33-2 如下：

**表 33-2　“物不知数”解答**

| 除数 | 余数 | 最小公倍数 | 衍数 | 乘率 | 各总 | 答数 | 最小答数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 3×5×7=105 | 5×7 | 2 | 35×2×2 | 140 + 63 + 30 = 233 | 233 − 2×105 = 23 |
| 5 | 3 | | 7×3 | 1 | 21×1×3 | | |
| 7 | 2 | | 3×5 | 1 | 15×1×2 | | |

在《孙子算经》“物不知数”题的启示下，经过秦九韶，焦循，张敦仁，黄宗宪等数学家的深入研究，得出了著名的孙子定理（又叫中国剩余定理）。

孙子定理：设 $m_1$，$m_2$，…，$m_k$ 是 $k$ 个两两互质的正整数，$M=m_1m_2\cdots m_k$，$M_i=\dfrac{M}{m_i}$，$i=1$，2，…$k$，则同余式组

$$\begin{cases} x\equiv b_1 \pmod{m_1} \\ x\equiv b_2 \pmod{m_2} \\ \cdots\cdots \\ x\equiv b_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

的解是

$$x\equiv b_1M'_1M_1+b_2M'_2M_2+\cdots+b_kM'_kM_k \pmod{m}$$

其中

$$M'_iM_i\equiv 1 \pmod{m_i}，(i=1，2，\cdots k)$$

这个定理的证明，一般初等数论的书上均有，请读者自行查阅。

解题过程可以列表 33-3 如下：

表 33-3　孙子定理

<table>
<tr><th>除数</th><th>余数</th><th>最小公倍数</th><th>衍数</th><th>乘率</th><th>各总</th><th>答数</th></tr>
<tr><td>$m_1$</td><td>$b_1$</td><td rowspan="4">$M=$<br>$m_1m_2\cdots m_k$</td><td>$M_1$</td><td>$M'_1$</td><td>$b_1M'_1M_1$</td><td rowspan="4">$x\equiv\sum_{i=1}^{k}b_iM'_iM_i$<br>$(\mathrm{mod}M)$</td></tr>
<tr><td>$m_2$</td><td>$b_2$</td><td>$M_2$</td><td>$M'_2$</td><td>$b_2M'_2M_2$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>$m_k$</td><td>$b_k$</td><td>$M_k$</td><td>$M'_k$</td><td>$b_kM'_kM_k$</td></tr>
</table>

世界上许多国家对一次同余式组都做过研究，有的直接或间接受到我国的影响和启示。下面选两个外国的古题，在时间上都晚于我国的“物不知数”，从比较中可以看到我们领先的成果和智慧的光辉。

**例 1**　今有物不知总数，只云：五除余一个，七除余二个，问总数几何？

答曰：一十六个。

日本关孝和《括要算法》(汉文)

这个题目比较简单，请读者自行解答。

**例 2**　解同余式组：

$$x\equiv 2\ (\mathrm{mod}3)\ \equiv 3\ (\mathrm{mod}5)\ \equiv 4\ (\mathrm{mod}7)$$

斐波那契《算经》(1202 年)

原书有解，其解法相当于以下形式：

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| mod3 | 70 | 2 | $2\times70=140-105=35$ | |
| mod5 | 21 | 3 | $3\times21=63$ | 63 |
| mod7 | 15 | 4 | $4\times15=60$ | 60 |

$$\begin{array}{r} 158 \\ 105 \\ \hline 53 \end{array}$$

斐波那契是意大利数学家（约1170—1250），他的著作《算盘书》是一部传播阿拉伯数学的不朽著作，书中出现了和《孙子算经》中一样的同余式问题。有学者认为，一种可能是通过丝绸之路由阿拉伯人传授了这一算法，也可能是偶然巧合。比利时学者李倍始在《十三世纪中国数学》书中认为斐没有对其解法作理论或一般解释，因此他的解题水平并没有超过《孙子算经》。

**读读练练**　　**练　习　题**

1. 十一数余三，七十二数余二，十三数余一，问本数。

答曰：1730

选自《续古摘奇算法》

2. 有记载说韩信统率大军，在册兵员26641人，部队集合时，按1～3，1～5，1～7报数，每次报数的余数依次为1，3，4。现在知道韩军缺员人数不到100人，求韩军实到的兵员人数和缺员人数。

答案：26548人，93人。

选自沈康身《历史数学名题赏析》

提示：　$x=88+105t,\ t\in Z$

$26641-100<x\leqslant 26641$

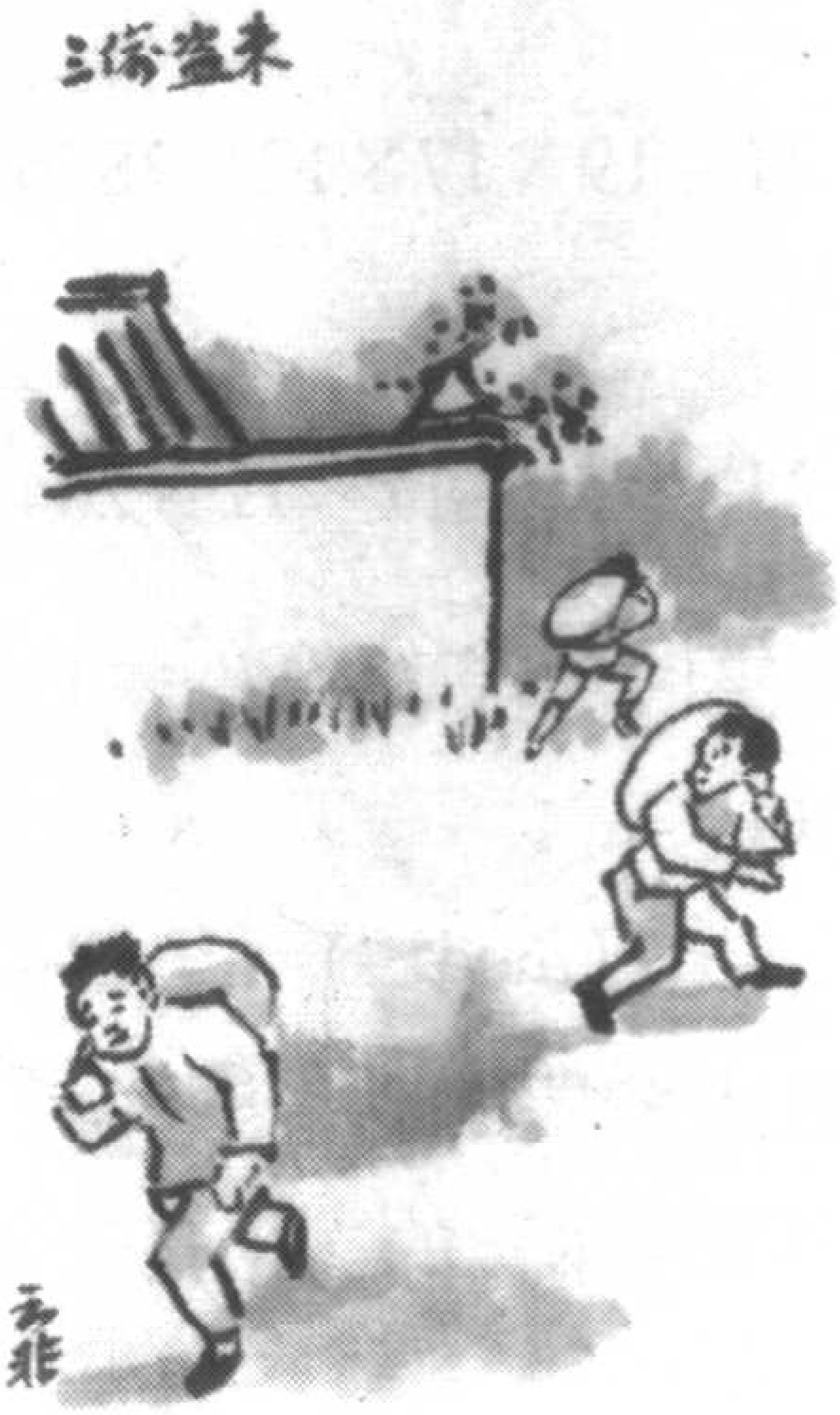
# 34 三偷盗米

问有米铺诉被盗去米一般三箩，皆适满，不记细数。今左壁箩剩一合，中间箩剩一升四合，右壁箩剩一合。后获贼，系甲、乙、丙三名。甲称当夜摸得马勺，在左箩满舀入布袋；乙称踢着木履，在中箩舀入布袋；丙称摸得漆碗，在右箩舀入布袋。将归食用，日久不知数。索到三器，马勺满容一升九合，木履容一升七合。漆碗容一升二合。欲知所失米数，计赃结断，三盗各几何？

答曰：共失米九石五斗六升三合；甲米三石一斗九升二合；乙米三石一斗七升九合；丙米三石一斗九升二合

选自《数书九章》

注：原题标题是《余米推数》



这是一则三偷盗米的故事。说的是某米店老板报告，夜里三箩筐米被盗，三箩的容量相同，都装满了米。调查现场发现，中箩还余米 1 升 4 合，左、右箩各余 1 合。后来案破，甲、乙、丙被抓获。甲供称当夜摸到一个马勺，在左箩舀米，乙称踢着一只鞋子，就用它在中箩取米，丙说拾得一个漆碗，在右箩盛米。经鉴定，勺、鞋、碗三者的容量依次是 1 升 9 合，1 升 7 合，1 升 2 合，问米店共失去多少米?

用纯数学的语言来说，这个题非常简单、明确（以合为单位），即：已知某数被 19 除余 1，被 17 除余 14，被 12 除余 1，求此数。

**解** 这个同余式组是

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{19} \\ x \equiv 14 \pmod{17} \\ x \equiv 1 \pmod{12} \end{cases}$$

其中 $m_1 = 19$，$m_2 = 17$，$m_3 = 12$，且两两互质。

最小公倍数

$$M = 19 \times 17 \times 12 = 3876$$

衍数

$$M_1 = \frac{M}{19} = 17 \times 12 = 204$$

求乘率 $M'_1$，即解同余式 $204M'_1 \equiv 1 \pmod{19}$，因为 204 除以 19，其余数是 14。

$204M'_1 \equiv 14M'_1 \equiv 1 \pmod{19}$

我们用更相减损法来具体地写出 $M'_1$ 的求算过程，从而了解我国古代“大衍求一术”的文化基础和数学思想，并体会这一算法蕴涵的道理。

用陈景润解“百鸡题”的方法：

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 14 | 19 | |
| 2 | 2×5 | 1×14 | 1 |
| | 4 | 5 | |
| | | 1×4 | 1 |
| | | 1 | |

$1=5-4=5-(14-2\times5)=3\times5-14=3\times(19-14)-14$
$=3\times19-4\times14$，$(-4)\times14+3\times19=1$

即 $(-4)\times14$ 被 19 除余 1，故 $(-4)\times14\equiv1\pmod{19}$

所以 $M'_1\equiv-4\equiv15\pmod{19}$

为了避免负整数，取 $M'_1=15$。

各总

$$1\times15\times204=3060$$

同理求得

$$M_2=\frac{M}{17}=19\times12=228$$

乘率 $M'_2$ 满足 $228M'_2\equiv7M'_2\equiv1\pmod{17}$，用上面同样的方法求得 $M_2'=5$，各总

$$14\times5\times228=15960$$

$$M_3=\frac{M}{12}=19\times17=323$$

$$323M'_3\equiv1\pmod{12}\text{，求得 }M'_3=11$$

各总

$$1\times11\times323=3553$$

所以每萝米数为 $x=3060+15960+3553=22573$

$$x\equiv3193\pmod{3876}$$

根据孙子定理，将结果列表 34-1：

**表 34-1 “三偷盗米”解答**

| 除数 | 余数 | 最小公倍数 | 衍数 | 乘率 | 各总 | 答数 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 1 | 19 × 17 × 12 = 3876 | 204 | 15 | 3060 | $x = 3060 + 15960 + 3553 = 22573 \equiv 3193$（mod3876） |
| 17 | 14 | | 228 | 5 | 15960 | |
| 12 | 1 | | 323 | 11 | 3553 | |

由条件

甲盗米 = 3193 − 1 = 3192 = 3 石 1 斗 9 升 2 合

乙盗米 = 3193 − 14 = 3179 = 3 石 1 斗 7 升 9 合

丙盗米 = 3193 − 1 = 3192 = 3 石 1 斗 9 升 2 合

店主共失米 = 3 × 3193 − （1 + 14 + 1） = 9563 = 9 石 5 斗 6 升 3 合

在秦九韶时代，如此巨大的数字，用筹算工具，其难度可想而知。

## 智慧之光　“大衍求一术”浅说

自从《孙子算经》中提出“物不知数”的题目以后，引起了后世极大兴趣。通过几代人的深入研究，取得了丰硕的成果。把同余式组

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

转化为解 3 个互相独立的同余式

$$5\times7\times M_1'\equiv1\ (\mathrm{mod}3)$$
$$3\times7\times M_2'\equiv1\ (\mathrm{mod}5)$$
$$3\times5\times M_3'\equiv1\ (\mathrm{mod}7)$$

理解这一步并不难，怎样找出形如

$$ax\equiv1\ (\mathrm{mod}b)$$

的一般解法却非常困难。秦九韶对此做了深入的研究，在《数书九章》里专题论述了他的研究成果，找出了 $M'_iD$ 的方法。因为右边的余数是 1，故称此法为“大衍求一术”简称“求一术”。由于秦氏著作深奥难懂，加上诸多社会因素，致使这部经典数学著作长期在我国失传。清代学者在《永乐大典》中抄出《数书九章》的原文以后群相研究，对“大衍求一术”用工尤勤。1803 年张敦仁出版《求一算术》，1874 年黄宗宪出版《求一术通解》，指出此术仅见于秦九韶《数书九章》中，五百年来无有知其说者，经过张敦仁、李锐、黄宗宪等人的深入研究，终于彻底解决了一次同余式的求解问题。

根据前辈思想方法，结合当代学者的一些研究成果，我们从“更相减损”运算过程中的各量关系入手，找出求 $M'_1$ 的方法，同时为解二元一次不定方程奠定基础。

首先分析更相减损术中各量之间的关系。

设 $a$，$b$ 为正整数，为简单起见，假定 $(a,\ b)=1$。在更相减损过程中，逐次求得的商为

$$q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_{n-1},\ q_n$$

余数为

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_{n-1},\ r_n$$

则有

$$a = q_1 b + r_1, \quad 0 < r_1 < b$$
$$b = q_2 r_1 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1$$
$$r_1 = q_3 r_2 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2$$
$$\cdots$$
$$r_{n-3} = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1},$$
$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n,$$
$$r_{n-1} = 1, \quad r_n = 1$$

现在讨论如何用 $a$，$b$ 的代数式来表示 $r_1$，$r_2$，$r_3$，…，$r_{n-1}$，$r_n$。

由上式可得

$$r_1 = a - q_1 b = B_1 a - A_1 b$$

其中

$$B_1 = 1, \quad A_1 = q_1$$

$r_2 = b - q_2 r_1 = b - q_2 (B_1 a - A_1 b) = (1 + A_1 q_2) b - B_1 q_2 a = A_2 b - B_2 a$

$$A_2 = 1 + A_1 q_2, \quad B_2 = B_1 q_2$$

$r_3 = r_1 - q_3 r_2 = (B_1 a - A_1 b) - q_3 (A_2 b - B_2 a) = (B_1 + B_2 q_3) a - (A_1 + A_2 q_3) b = B_3 a - A_3 b$

$$B_3 = B_1 + B_2 q_3, \quad A_3 = A_1 + A_2 q_3$$

余此类推

$$r_{2k-1} = B_{2k-1} a - A_{2k-1} b, \quad r_{2k} = A_{2k} b - B_{2k} a$$

我们约定 $B_0 = 0$，$A_0 = 1$，则有

$$B_k = B_{k-2} + B_{k-1} q_k, \quad A_k = A_{k-2} + A_{k-1} q_k, \quad (k = 2, 3, \cdots, n)$$

根据 $(a, b) = 1$ 的条件，用更相减损法最后出现的等数一定是 $r_{n-1} = r_n = 1$，这样总可以得到

$$B_n a - A_n b = 1 \tag{34-1}$$

或者

$$A_n b - B_n a = 1 \tag{34-2}$$

求一的问题就彻底解决了。

事实上，由（34-1）式

$$B_n a = A_n b + 1，即\ B_n a \equiv 1\ (\bmod b) \tag{34-3}$$

这时，同余式 $ax \equiv 1\ (\bmod b)$ 的解就是

$$x \equiv B_n\ (\bmod b)$$

同样，由（34-2）式

$$A_n b = B_n a + 1，即\ A_n b \equiv 1\ (\bmod a)$$

同余式 $bx \equiv 1\ (\bmod a)$ 的解就是

$$x \equiv A_n\ (\bmod a)$$

现在把上面的演算过程用列表的形式表示出来，这样，有利于理解秦九韶“大衍求一术”的基本格式。

更相减损过程中各量之间的关系表 34-2。

上面的推导过程虽然复杂，只要掌握规律，实际计算还是比较简单的。秦九韶、张敦仁、黄宗宪等人总结的计算公式都依据这个原理。表 34-2 可以帮助我们从总体上认识更相减损过程中各数量之间的关系。

**例 1** 解同余式：

$$337x \equiv 1\ (\bmod 256) \tag{34-4}$$

$$256x \equiv 1\ (\bmod 337) \tag{34-5}$$

**解** 用更相减损法，列出表 34-3。

从表 34-3 得到 $104b - 79a = 1$，即 $104 \times 256 - 79 \times 337 = 1$。

$$104 \times 256 \equiv 1\ (\bmod 337)$$

表 34-2 更相减损过程中各量关系

| 编号 | 9 | 7 | 5 | 3 | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 数据 | $B_{奇}a - A_{奇}b = r_{奇}$ | $B_{奇}$ | $A_{奇}$ | $q_{奇}$ | $a$<br>$(r_{奇})$ | $b$<br>$(r_{偶})$ | $q_{偶}$ | $A_{偶}$ | $B_{偶}$ | $A_{偶}b - B_{偶}a = r_{偶}$) |
| 0 | | | | | | | | $A_0 = 1$ | $B_0 = 0$ | $b - 0 \cdot a = b$,($r_0$ |
| 1 | $a - bq_1 = r_1$ | $B_1 = 1$ | $A_1 = q_1$ | $q_1$ | $a$<br>$-bq_1$<br>$r_1$ | | | | | |
| 2 | | | | | | $b$<br>$-r_1 \cdot q_2$<br>$r_2$ | $q_2$ | $A_0$<br>$+A_1 \cdot q_2$<br>$A_2$ | $B_0$<br>$+B_1 \cdot q_2$<br>$B_2$ | |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| $2n-1$ | $B_{2n-1}a - A_{2n-1}b = r_{2n-1}$ | $B_{2n-3}$<br>$+B_{2n-2} \cdot q_{2n-1}$<br>$B_{2n-1}$ | $A_{2n-3}$<br>$+A_{2n-2} \cdot q_{2n-1}$<br>$A_{2n-1}$ | $q_{2n-1}$ | $r_{2n-3}$<br>$-r_{2n-2} \cdot q_{2n-1}$<br>$r_{2n-1}$ | | | | | |
| $2n$ | | | | | | $r_{2n-2}$<br>$-r_{2n-1} \cdot q_{2n}$<br>$r_{2n}$ | $q_{2n}$ | $A_{2n-2}$<br>$+A_{2n-1} \cdot q_{2n}$<br>$A_{2n}$ | $B_{2n-2}$<br>$+B_{2n-1} \cdot q_{2n}$<br>$B_{2n}$ | $A_{2n}b - B_{2n}a = r_{2n}$ |
| 备注 | 1. 理解初始数据 $A_0, B_0, A_1, B_1$ 的意义;<br>2. 记住基本递推关系:$r_{k-2} - r_{k-1} \cdot q_k = r_k$;$A_{k-2} + A_{k-1} \cdot q_k = A_k$, $B_{k-2} + B_{k-1} \cdot q_k = B_k$;<br>3. "大衍求一术"终止于 $r_{2n-1} = r_{2n} = 1$。 | | | | | | | | | |

表 34-3 例 1 解答

| 编号 | 9 | 7 | 5 | 3 | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 数据 | $B_{奇}a-A_{奇}b=r_{奇}$ | $B_{奇}$ | $A_{奇}$ | $q_{奇}$ | $a=337$ ($r_{奇}$) | $b=256$ ($r_{偶}$) | $q_{偶}$ | $A_{偶}$ | $B_{偶}$ | $A_{偶}b-B_{偶}a=r_{偶}$ |
| 0 | | | | | | | | $A_0=1$ | $B_0=0$ | |
| 1 | | $B_1=1$ | $A_1=q_1=1$ | 1 | 337<br>$-256\times1$<br>81 | | | | | |
| 2 | | | | | | 256<br>$-81\times3$<br>13 | 3 | 1<br>$+1\times3$<br>4 | 0<br>$+1\times3$<br>3 | |
| 3 | | 1<br>$+3\times6$<br>19 | 1<br>$+4\times6$<br>25 | 6 | 81<br>$-13\times6$<br>3 | | | | | |
| 4 | | | | | | 13<br>$-3\times4$<br>1 | 4 | 4<br>$+25\times4$<br>104 | 3<br>$+19\times4$<br>79 | $104b-79a=1$ |
| 5 | $177a-233b=1$ | 19<br>$+79\times2$<br>177 | 25<br>$+104\times2$<br>233 | 2 | 3<br>$-1\times2$<br>1 | | | | | |

$$177a-233b=1,\quad 77\times337-233\times256=1$$

$$177\times337\equiv1\ (\bmod 256)$$

所以同余式（34-4）　$337x\equiv1\ (\bmod 256)$ 的解是

$$x\equiv177\ (\bmod 256)$$

同余式（34-5）　$256x\equiv1\ (\bmod 337)$ 的解是

$$x\equiv104\ (\bmod 337)$$

如果解一个同余式，表 34-3 中各项不必全部列出，不需要的可以省略。例如只解例 1 中 34-4 式，表中 $A$ 列就可以省去。

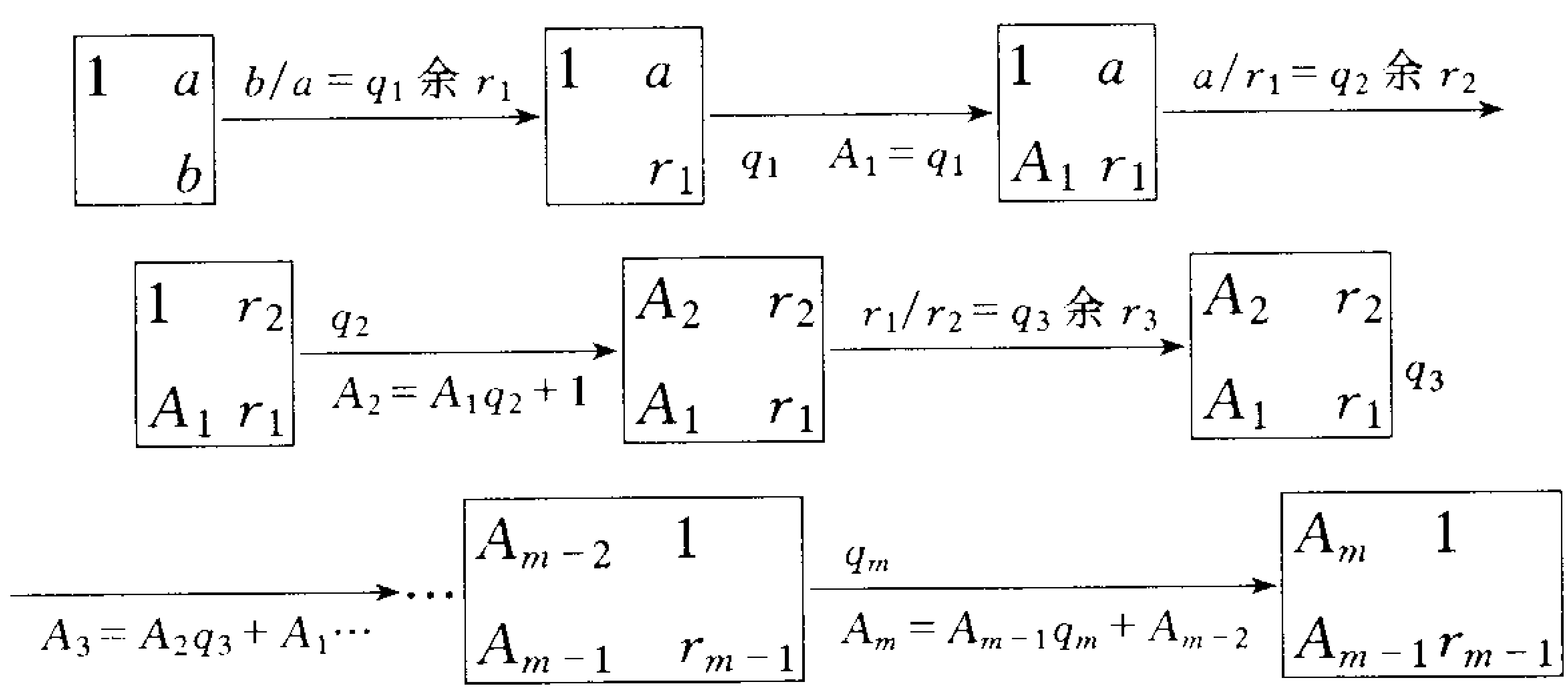
事实上，秦九韶首创的“大衍求一术”解题格式十分简便。他把表中数据重新组合，构成一个 4 元方阵，按一定的程序演算，非常方便，其原理依据上表。这一算法，数学家吴文俊非常赞赏，认为它体现了中国古代数学的构造性与机械化两大特色，很符合现代计算机的时代要求。

解同余式：

$$ax\equiv1\ (\bmod b)$$

其中，$a$，$b$ 为正整数，$a<b$，$(a,\ b)=1$。

秦九韶“大衍求一术”的格式和程序如下：




止。

这样

$$x \equiv A_m \pmod{b}$$

现在用秦九韶的方法给出例 1，例 2 的第 2 种解法。

**例 2** $337x \equiv 1 \pmod{256}$ (34-6)

因为秦氏方法要求 $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 中 $a<b$，所以先将原式变形为：

$$337x \equiv 81x \equiv 1 \pmod{256}$$

按上述程序计算

$$\boxed{\begin{matrix}1 & 81\\ & 256\end{matrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}1 & 81\\ & 13\end{matrix}} \xrightarrow[3]{} \boxed{\begin{matrix}1 & 3\\ 3 & 13\end{matrix}} \xrightarrow{6} \boxed{\begin{matrix}19 & 3\\ 3 & 13\end{matrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}19 & 3\\ 3 & 1\end{matrix}}$$

$$\xrightarrow[4]{} \boxed{\begin{matrix}19 & 3\\ 79 & 1\end{matrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}19 & 1\\ 79 & 1\end{matrix}} \xrightarrow{2} \boxed{\begin{matrix}177 & 1\\ 79 & \end{matrix}} \text{止}$$

所以 $x \equiv 177 \pmod{256}$

**例 3** $256x \equiv 1 \pmod{337}$ (34-7)

$$\boxed{\begin{matrix}1 & 256\\ & 337\end{matrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}1 & 256\\ & 81\end{matrix}} \xrightarrow[1]{} \boxed{\begin{matrix}1 & 256\\ 1 & 81\end{matrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}1 & 13\\ 1 & 81\end{matrix}} \xrightarrow{3} \boxed{\begin{matrix}4 & 13\\ 1 & 81\end{matrix}} \longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{matrix}4 & 13\\ 1 & 3\end{matrix}} \xrightarrow[6]{} \boxed{\begin{matrix}4 & 13\\ 25 & 3\end{matrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}4 & 1\\ 25 & 3\end{matrix}} \xrightarrow{4} \boxed{\begin{matrix}104 & 1\\ 25 & 3\end{matrix}} \text{止}$$

所以 $x \equiv 104 \pmod{337}$

从这几个例题可以看出秦九韶的方法非常简便。“大衍求一术”是我国数学史上一项伟大的成就，经历了几代人上千年的深入研究，积累了丰富的资料，取得了多方面的成果。这里仅介绍一点入门知识，但愿有一些启迪作用。

**读读练练**　　　　练　习　题

1. 解同余式

$$5x \equiv 1 \pmod{23}$$

选自张敦仁《求一算术》

答案：$x = 14$

2. 解同余式

$$35x \equiv 1 \pmod{3}$$

并说明为什么"三人同行七十稀"?

# 35 百鸡问题

今有鸡翁一，值钱五，鸡母一，值钱三，鸡雏三，值钱一。凡百钱买百鸡，问鸡翁母雏各几何？

答曰：鸡翁四值钱二十，鸡母十八，

值钱五十四，鸡雏七十八，值钱二十六；

又答：鸡翁八，值钱四十，鸡母十一，

值钱三十三，鸡雏八十一，值钱二十七；

又答：鸡翁十二，值钱六十，鸡母四，

值钱十二，鸡雏八十四，值钱二十八。

术曰：鸡翁每增四，鸡母每减七，凡鸡雏每益三即得。

选自《张丘建算经》

本题是说，一只大公鸡值 5 个钱，一只母鸡值 3 个钱，每 3 只小鸡值 1 个钱，现有 100 个钱买 100 只鸡，问大公鸡、母鸡、小鸡各应买几只？

题给的“术曰”，令人费解。很难从中想出解题的路子。同学们可以按照常规思路，设未知数，列出方程，向前摸索，将探得的结果尽量用“术曰”的方法来解释。

**解** 设大公鸡 $x$ 只，母鸡 $y$ 只，小鸡 $z$ 只，依题意有

$$\begin{cases} 5x+3y+\dfrac{z}{3}=100 & (35\text{-}1) \\ x+y+z=100 & (35\text{-}2) \end{cases}$$

消去 $z$ 得：

$$7x + 4y = 100$$

$$7x = 4(25 - y) \qquad (35\text{-}3)$$

(35-3) 式表明，公鸡数 $x$ 应是 4 的倍数，令 $x = 4t$，$t$ 为整数，则

$$y = 25 - 7t, z = 75 + 3t \qquad (35\text{-}4)$$

当 $t = 1$、2、3 时，其解为

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$: | 4 | 8 | 12 |
| $y$: | 18 | 11 | 4 |
| $z$: | 78 | 81 | 84 |

事实上，列出方程（35-1)、(35-2)、(35-3) 是很容易的，初一、二的学生都做得出来，关键在于分析。“浅尝辄止”是做不出什么难题的。(35-4) 式的引出揭示了“术曰”关键，$t$ 增 1，则 $x$（翁）增 4，$y$（母）减 7，$z$（雏）益 3。从 $x$ 必须是 4 的倍数出发，其解答就不难得到了。程大位曾经说过：“难者，难也。然似难而实非难也。…，其难题唯在乎立法，立法既明，则迎刃而破，又何难之有哉。”

若认定为非负解，则（0，25，75）亦可视为一组解。

比利时鲁文大学教授李倍始在他的《十三世纪的中国数学》中写道：“张丘建求得了正确的解，但是，惊人的事实说明了他深知这些解之间的关系。可惜的是，我们不知道他推求的第一组解的方法，直到时曰醇（1861 年）的时代，没有注释者了解张氏的法则。”

## 名人佚事　　时曰醇勤奋治学

百鸡问题是我国历史上的一个名题。几百年来，众多学者围绕这个题开展研究。这原本是一个二元一次不定方程，除了

用《九章算术》的方程术外，学者们还把它化归为等价的同余式问题，用“大衍求一术”来解，取得了斐然的成绩。特别是清代学者时曰醇对本题有深入研究，著《百鸡术衍》（1861年），分上、下卷，共28题，都是不定方程问题，分别用方程术和求一术两种方法求解。据华世芳《近代畴人著述记》（1884年）记载，时曰醇“晚年目已双瞽，犹能手按珠盘，口


白芙堂算學

百雞術衍卷上

嘉定時曰醇清甫編述

長沙丁取忠雲梧校刊

今有雞翁一，直錢五。雞母一，直錢三。雞雛三，直錢一。凡百錢買雞百隻，問雞翁母雛各幾何。

答曰：雞翁四，直錢二十。雞母十八，直錢五十四。雞雛七十八，直錢二十六。

又答：雞翁八，直錢四十。雞母十一，直錢三十三。雞雛八十一，直錢二十七。

又答：雞翁十二，直錢六十。雞母四，直錢十二。雞雛八十四，直錢二十八。

術曰：雞翁每增四，雞母每減七，雞雛每益三，即得。

如方程

用雞雛求

右行雛三　母一　共雞一百

左行雛直一　母直三　共錢一百

以左行首位雛直一徧乘右行，右行首位雛三徧乘左行，兩兩相減，上餘八為法，下餘二百為實，除之得二十五。以母一乘不變，即為雞母數。以減共雞一百，餘七十五為雞雛數。乃用翁雛較七減母雛較四，加翁母較三加雛，得雞母一十八，雞翁四，雞雛七十八，為一答。又各依較數加減而得又答。

用雞翁求

右行翁一　母一　共雞一百

左行翁直五　母直三　共錢一百

以左行首位翁直五徧乘右行，右行首位翁一徧乘

三十

授其子，著百鸡术衍二卷，以张丘建百鸡一题，衍为大、中、小三色，……，每题立两法，一驭以方程，一驭以求一。”百年难题，做如此深入研究，已属不易，而这种勤奋刻苦的治学精神，更是难能可贵。

像时曰醇这样的情况历史上不乏其人，大数学家欧拉也有类似经历。1771 年，他在彼得堡的住处遭大火袭击，资料被焚，双目失明，而他完全凭着坚强的意志和惊人的毅力，回忆所做过的研究，亲自口授，其长子记录，累计发表论文 400 多篇及专著多部，几乎占他全部著作的一半以上。

## 智慧之光　陈景润解“百鸡问题”

陈景润是我国著名数学家，他在数论的重要经典问题——哥德巴赫猜想的研究上取得了举世瞩目的成果。他证明了“陈氏（1+2）定理”，即《大偶数可表为一个素数与一个不超过两个素数乘积之和》，被世界上公认为是筛法的“光辉顶峰”。1978 年他为“具有初中、高中程度的同志们”写了一本《初等数论》，目的为辅导大家读点数论书。浅显易懂地讲述数论问题是一件不容易的事，再由浅入深就更难了，特别是把一些重要的数学思想在“不知不觉”中平铺直叙，把你从“山重水复”引向“柳暗花明”。这种立足当前、放眼长远的手法，非常人容易做到的。读他的书，一定要好好消化，切勿“入宝山而空返”。

陈的解法是这样的：

设 $x$，$y$，$z$ 分别代表鸡翁，鸡母，鸡雏的数目，则有

$$\begin{cases} 5x + 3y + \frac{z}{3} = 100 & (35-5) \\ x + y + z = 100 & (35-6) \end{cases}$$

消去 $z$ 得

$$7x + 4y = 100 \qquad (35-7)$$

为了求这个方程的解，先求方程

$$7s + 4t = 1 \qquad (35-8)$$

的解。

因为 $1 = 4 - 3 = 4 - (7 - 4) = -7 + 4 \times 2$

即 $s = -1$，$t = 2$ 是方程（35-8）的一组解。

注意：这样一个特殊的转换却蕴含了一个极为重要的“求一”思想，请读者把它和更相减损法和“物不知总”题联系起来，深入地思考一下。

令 $x = 100s$，$y = 100t$，则

$$7x + 4y = 100(7s + 4t) = 100$$

故 $x = -100$，$y = 200$ 是方程（35-7）的一个整数解。我们可以证明，方程（35-7）的一切解都可以表示为

$$x = -100 - 4t, y = 200 + 7t, (t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad (35-9)$$

由于 $x$，$y$ 代表鸡翁，鸡母的个数，所以，$x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$，代入（35-9）式，解得

$$-\frac{200}{7} \leqslant t \leqslant -25$$

因为 $t$ 是整数，故 $t = -28$、$-27$、$-26$、$-25$ 和 $z = 3t$。这样就得到下面的四组解：

$$\begin{cases}x=12\\y=4\\z=84\end{cases}\quad\begin{cases}x=8\\y=11\\z=81\end{cases}\quad\begin{cases}x=4\\y=18\\z=78\end{cases}\quad\begin{cases}x=0\\y=25\\z=75\end{cases}$$

陈景润从“1”突破，体现“求一”思想，也是我国古代数学家处理这类问题的基本思想，下面我们将进行具体的说明。

**读读练练**

## 练 习 题

1. 某人以100个金币买100头牲口，其中1马值3金币，1牛值1金币，1金币买24只山羊，问他买马、牛、羊各多少？

答案：马，牛，羊分别为23，29，48只（英国）

2. 今有鸭1只值4钱，雀5只值1钱，鸡1只值1钱，百钱买百鸟，问鸭、雀、鸡各买多少？

答案：(4，15，81)，(8，30，62)，(12，45，43)，(16，60，24)，(20，75，5)

从这两个题目中可以看“百鸡问题”的世界影响。（阿拉伯）

# 36 獐兔鼠歌

獐十八　兔三斤　老鼠四两（十六两为一斤）不为轻

九十九个头　合起来一百斤

徽州民间题，俞佳棠提供

注：1 斤 = 16 两



1997 年我同俞佳棠外出调查，途中闲聊了这道题，这是他的夫人训练小学生智力的思考题，意味着经过简单的思考就可以报出答案来了。我看难度不小，大家可以试一试。这里，我们从“洋解法”讲到“土解法”，请读者自行比较。

**解法 1**　不定方程法

所谓“不定方程法”就是用“古往今来”中介绍的公式和方法。

设獐 $x$ 只，兔 $y$ 只，鼠 $z$ 只，由条件

$$\begin{cases} x+y+z=99 & (36-1) \\ 18x+3y+\dfrac{1}{4}z=100 & (36-2) \end{cases}$$

(36-2) 去分母

$$72x+12y+z=400$$

消去 $z$ 得

$$71x+11y=301 \qquad (36-3)$$

根据二元一次不定方程的解法，先用“更相减损法”求方程

$$71x+11y=1$$

的一组解 $(s,\ t)$。

由右表知

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 71 | 11 | |
| 6 | 66 | 10 | 2 |
| | 5 | 1 | |
| | 4 | | |
| | 1 | | |

$$\begin{aligned} 1 &= 5-4=11-10 \\ &= 11-2\times 5 \\ &= 11-2\times(71-6\times 11) \\ &= (-2)\times 71+13\times 11 \end{aligned}$$

令 $s=-2$，$t=13$，有

$$71s+11t=1$$

令 $x_0=301s=-602$，$y_0=301t=3913$

则（$x_0$，$y_0$）是方程（36-3）的一组解。故（36-3）的一切解可表示为

$$x=-602-11t, y=3913+71t \quad (t \in Z)$$

从题目的条件分析，獐的个数应不超过 3，即 $0<x\leqslant 3$

由 $0<-602-11t\leqslant 3$，解得 $t=-55$

所以 $x=-602-11\times(-55)=3$，$y=3913+71\times(-55)=8$。

答案是獐 3 只，兔 8 只，鼠 88 只。

这个题就是给大学生做，也不算容易题。

**解法 2** 中学生可以接受的不定方程解法。

在上法的基础上，得到（36-3）式后，沿“更相减损”的思路，反复简化

$$y=27-6x+\frac{4-5x}{11} \tag{36-4}$$

令 $u=\frac{4-5x}{11}$，则 $11u+5x=4$

$$x=-2u+\frac{4-u}{5} \tag{36-5}$$

令 $v=\frac{4-u}{5}$，则 $5v+u=4$

$$u=4-5v \tag{36-6}$$

代入（36-5）得：

$$x=11v-8 \tag{36-7}$$

（36-7）代入（36-4）得：

$$y=79-71v \tag{36-8}$$

（36-8）代入（36-3）得：

$$z=60v+28 \tag{36-9}$$

(36-7)、(36-8)、(36-9) 是原不定方程的通解，其中 $v\in Z$

因为 $0<x\leqslant 3$，代入 (36-7) 求得 $v=1$

所以 $x=3,\ y=8,\ z=88$

**解法 3** 算术解法。

民间给小学生做的题何需费如此大力，动脑筋想一想就可以报出答案来了，这就是分析问题、解决问题的能力。分析这样的问题首先要思维定向，不要胡思乱想。根据题目的实际，我们定为“獐为主，兔定边，老鼠量轻可补添”的原则来分析。

獐为 5，不可能；

獐为 4，也不可能（想一想、为什么?），

獐为 3，$3\times 18=54$ 斤，余 46 斤，因为鼠 100 只才 25 斤，所以兔的斤两必须超过 21 斤（7 只）；

若兔为 8，$3\times 8=24$ 斤，余 22 斤鼠 88 只。(答案)

其他情况不可能。

轻而易举地解决了民间难题，说明中算古题还是很富有教育意义的。

## 古往今来　更相减损法和二元一次不定方程

将百鸡问题数学化，我们得到形如

$$ax+by=c \tag{36-10}$$

的二元一次不定方程，$a$，$b$，$c\in Z$，且 $ab\neq 0$。

现在我们来研究求方程 (36-10) 的整数解问题。

先讨论当 $c=0$ 时，

$$ax + by = 0 \quad (36\text{-}11)$$

$$x = -\frac{b}{a}y \quad (36\text{-}12)$$

当且仅当 $y$ 能被 $a$ 整除时，方程（36-10）才有整数解。

令 $y = at$，$t \in Z$，代入（36-12）得 $x = -bt$，于是（36-11）式的一切整数解可表示为

$$\begin{cases} x = -bt \\ y = at \end{cases} \quad (t \in Z)$$

这样，方程（36-11）的求解问题就彻底解决了。

当 $c \neq 0$ 时，如果 $c < 0$，方程两边同乘以 $-1$，即可化为正数了。所以我们约定 $c > 0$，又因为 $x$，$y$ 在整数范围内取值，我们只要研究 $a$，$b$ 都是正数的情况就行了。

即 $ax + by = c$，　　$a$，$b$，$c \in Z^+$

我们假定 $a$，$b$ 互质，即 $(a, b) = 1$。

事实上，若 $a$，$b$ 不互质，即 $(a, b) = d > 1$，则

$a = a_1 d$，$b = b_1 d$，$a$，$b$，$d \in Z$，$(a_1, b_1) = 1$

这时有

$$(a_1 x + b_1 y)d = c \quad (36\text{-}13)$$

如果 $c$ 能被 $d$ 整除，即 $c = c_1 d$，则（36-13）式为

$$a_1 x + b_1 y = c_1, \quad (a_1, b_1) = 1$$

如果 $c$ 不能被 $d$ 整除，则（36-13）无解。

下面介绍两个常用的定理。

**定理 1**　如果 $a$，$b$ 互质，则一定存在 $x$，$y \in Z$，使得

$$ax + by = 1 \quad (36\text{-}14)$$

就是说，只要 $a$，$b$ 互质，方程（36-14）在整数范围内一定有解。

这个定理可以用更相减损法加以证明。陈景润的解法就暗示了证明的思路，其本质就是我国数学家数百年来致力研究的“求一”思想和方法。事实上，我们在“大衍求一术”的表34-2里已经证明了这个定理。现在用一个例题来浅显地加以说明。

**例 1**　求二元一次不定方程的一组解。

$$36x+83y=1$$

**解**　我们用更相减损法把求一变换的过程表示出来，请大家注意从中找出规律。

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 36 | 83 | |
| 3 | 33 | 72 | 2 |
| | 3 | 11 | |
| 1 | 2 | 9 | 3 |
| | 1 | 2 | |

由下而上，依次推演

$$\begin{aligned}1&=3-2=3-(11-3\times3)\\&=4\times3-11\\&=4\times(36-3\times11)-11\\&=4\times36-13\times11\\&=4\times36-13(83-2\times36)\\&=30\times36-83\times13\end{aligned}$$

所以　　$x=30,\ y=-13$

**定理 2**　设 $(a,b)=1, c\in Z$，则一定存在整数 $x$，$y$，使得 $ax+by=c$ 成立。

**证**　由定理 1 知，存在 $s$，$t\in Z$，使得

$$as+bt=1$$

成立。

令 $x=sc$，$y=tc$，则

$$ax+by=c(as+bt)=c$$

故 $x$，$y$ 是方程（36-10）的解。

**定理 3**　设二元一次不定方程

$$ax+by=c，其中 a，b，c\in Z^{+}，(a，b)=1 \qquad (36\text{-}10)$$

有一组整数解 $x=x_0$，$y=y_0$，则（36-10）的一切整数解可以表示成

$$x=x_0-bt，\ y=y_0+at，\qquad t\in Z \qquad (36\text{-}14)$$

**证**

因为 $x_0$，$y_0$ 是（36-10）式的解，即

$$ax_0+by_0=c$$

那么 $a(x_0-bt)+b(y_0+at)=ax_0+by_0=c$

所以 $x_0-bt$，$y_0+at$ 是（36-10）式的解

下面我们证明（36-10）式的任意一组解都可以表示成（36-14）的形式。

设 $x'$，$y'$是（36-10）式的任意一组整数解，则

$$ax'+by'=c$$

又因为 $x_0$，$y_0$ 是（36-10）式的解，即

$$ax_0+by_0=c$$

两式相减，得

$$a(x'-x_0)+b(y'-y_0)=0$$

$$a(x'-x_0)=-b(y'-y_0) \qquad (36-15)$$

因为 $a$，$b$ 互质，故 $a$ 必能整除 $y'-y_0$，即

$$y'-y_0=at, y'=y_0+at, t\in Z \qquad (36-16)$$

将（36-16）式代入（36-15）式，得

$$a(x'-x_0)=-b\times at$$

所以 $x'=x_0-bt$，$\qquad t\in Z \qquad (36-17)$

故（36-10）式的一切解都可以表示成（36-14）的形式。

这样二元一次不定方程就可以用“求一”的方法来解

决了。

**读读练练** 练　习　题

1. 求 $111x-321y=75$ 的一切整数解。

答案：$x=-8+107t$，$y=-3+37t$，$t\in Z$

2. 求下列不定方程的整数解

(1) $7x+15y=0$

(2) $9x-11y=1$

答案：(1) $x=-15t$，$y=7t$，$t\in Z$

(2) $x=5+11t$，$y=4+9t$，$t\in Z$

# 37 三翁垂钓

三老翁甲、乙、丙合伙钓鱼并将所钓的鱼放在一起。钓毕，甲将鱼均分为三堆，多一条扔去，自取一堆；乙来后，误以为鱼未分，将所剩的鱼放在一起，均分三堆，多一条扔去，自取一堆；丙来后亦同乙一样，将两堆鱼和在一起，均分成三堆，多一条扔去，自取一堆，问鱼的总数是多少？

选自项锡华《数学花絮》



黄山市电业局高级工程师项锡华学生时代就爱好数学，将几十年来搜集的趣题编成《数学花絮》，赠作者一册。该题编入此书。

**解** 设鱼的总数为 $x$ 条，

甲取$\frac{1}{3}$（$x-1$）条，余

$$y_1 = \frac{2}{3}(x-1) \qquad (37\text{-}1)$$

乙取$\frac{1}{3}$（$y_1-1$）条，余

$$y_2 = \frac{2}{3}(y_1-1) = \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}(x-1)-1\right] = \frac{4}{9}x - \frac{2}{3}\left(1+\frac{2}{3}\right) \qquad (37\text{-}2)$$

丙取$\frac{1}{3}$（$y_2-1$）条，余

$$y_3 = \frac{2}{3}(y_2-1) = \frac{8}{27}x - \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right) = \frac{8}{27}x - \frac{38}{27} \qquad (37\text{-}3)$$

（37-3）式去分母

$$27y_3 = 8x - 38 \qquad (37\text{-}4)$$

（37-4）式是一个二元一次不定方程。

$$x = 3y_3 + 4 + \frac{3y_3+6}{8} \qquad (37\text{-}5)$$

令 $t=\frac{3y_3+6}{8}$，即 $3y_3+6=8t$

$$y_3 = 2t - 2 + \frac{2t}{3} \qquad (37\text{-}6)$$

再令 $t=3k$，$k$ 取整数，代入（37-6）式有

$$y_3 = 6k + 2k - 2 = 8k - 2 \quad (k \in Z) \qquad (37\text{-}7)$$

代入（37-5）

$$x = 3(8k - 2) + 4 + 3k = 27k - 2 \qquad (37\text{-}8)$$

所以 $\begin{cases} x = 27k - 2 \\ y_3 = 8k - 2 \end{cases} \quad (k \in Z)$

是不定方程（37-4）整数解的一般表达式。

当 $k=1$ 时，$x=25$（条）是三翁所钓鱼数的最小值。

## 名人轶事　　五猴分桃

著名物理学家、诺贝尔奖金获得者李政道教授视察中国科技大学少年班时，曾出过一个猴子分桃问题来考一考这些小同学们。题目是这样的：

五只猴子分一堆桃子，怎么也分不平，最后决定明天再分。当晚，第一只猴起来，偷偷地数了一下，抛去一只桃子，再平均分成五堆，拿走一堆藏好，将其余四堆仍然混在一起；第二只，第三只，第四只，第五只猴子均如法炮制。至次日天明，剩下的桃子刚好能平分为 5 堆，问桃子的总数是多少？

对于数量关系复杂的题目，我们可以用“笨”办法。一步一步地“摸着石头过河”。

**解**　设第五只猴子偷去 $x$ 只桃子，那么

第五只猴子取桃前夕的桃子数是

$$5x + 1$$

第四只猴子取桃前夕的桃子数是

$$\frac{5}{4}(5x + 1) + 1$$

第三只猴子取桃前夕的桃子数是

$$\frac{5}{4}\left[\frac{5}{4}(5x + 1) + 1\right] + 1$$

……

第一只猴子取桃前桃子的总数设为 $y$，则

$$y=\frac{5}{4}\left\{\frac{5}{4}\left\{\frac{5}{4}\left[\frac{5}{4}(x+1)+1\right]+1\right\}+1\right\}+1$$

$$=12x+8+\frac{53(x+1)}{256} \quad (37-9)$$

令 $\frac{x+1}{256}=k$，则 $x=256k-1$ (37-10)

代入 (37-9) 得

$$y=12(256k-1)+8+53k=3125k-4 \quad (37-11)$$

所以 $\begin{cases}x=256k-1\\y=3125k-4\end{cases}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ (37-12)

是方程 (37-9) 的通解。

原题要求剩下的桃子 $4x$ 刚好能平分为 5 堆，那么

$$x=256k-1=255k+k-1 \quad (37-13)$$

应是 5 的倍数，显然，只要

$$k-1=5t,k=5t+1,(t\in N) \quad (37-14)$$

就行了。将 (37-14) 式代入 (37-12) 式得

$$\begin{cases}x=256(5t+1)-1=1280t+255\\y=3125(5t+1)-4=15625t+3121\end{cases} \quad (t\in N)$$

(37-15)

显然，$t=0$ 时，$y=3121$ (只) 是最小解。

李政道先生的题目确实不容易做，读者还可以研究一下其他的解法。

## 名人轶事　马克思解不定方程

马克思在研究无产阶级革命学说的同时，很重视数学科学

的学习与研究。他写了一本《数学手稿》，是用辩证唯物主义思想研究数学的范本。书中有这样一道题，大家可以试一试。

**例** 有30个人，其中有男人、女人和小孩，在一家小饭馆里花了50先令，每个男人花3先令，每个女人花2先令，每个小孩花1先令，问男人、女人和小孩各多少人？

**解** 设 $x$，$y$，$z$ 分别代表男人、女人和小孩的人数，则

$$\begin{cases} x + y + z = 30 & (37-16) \\ 3x + 2y + z = 50 & (37-17) \end{cases}$$

(37-17) − (37-16) 得

$$2x + y = 20$$

$$y = 2(10 - x) \qquad (37-18)$$

因为 (37-18) 式简单，可以直接求出方程组的通解。

令 $t = 10 - x$，则

$$x = 10 - t,\ (t \in Z) \qquad (37-19)$$

$$y = 2t \qquad (37-20)$$

$$z = 30 - x - y = 20 - t \qquad (37-21)$$

(37-19)、(37-20)、(37-21) 就是方程组的通解，其中 $t \in Z$。

由于 $0 < x < 30$，$0 < 10 - t < 30$，$y > 0$ 所以 $0 < t < 10$。

本题共有9组解，简化成 ($x$，$y$，$z$) 形式：(9，2，19)，(8，4，18)，(7，6，17)，(6，8，16)，(5，10，15)，(4，12，14)，(3，14，13)，(2，16，12)，(1，18，11)。

**读读练练** **练 习 题**

1. 取一分、二分、五分的硬币共十枚，付给一角八分钱，

问有几种不同的取法？

答案：(2，8，0)，(5，4，1)，(8，0，2)

2. 有布7丈5尺，裁剪成大人和小孩的衣料，大人一件衣服用布7尺2寸，小孩一件衣服用布3尺，问各裁剪多少件衣服恰好把布用尽？

答案：(0，25)，(5，13)，(10，1)

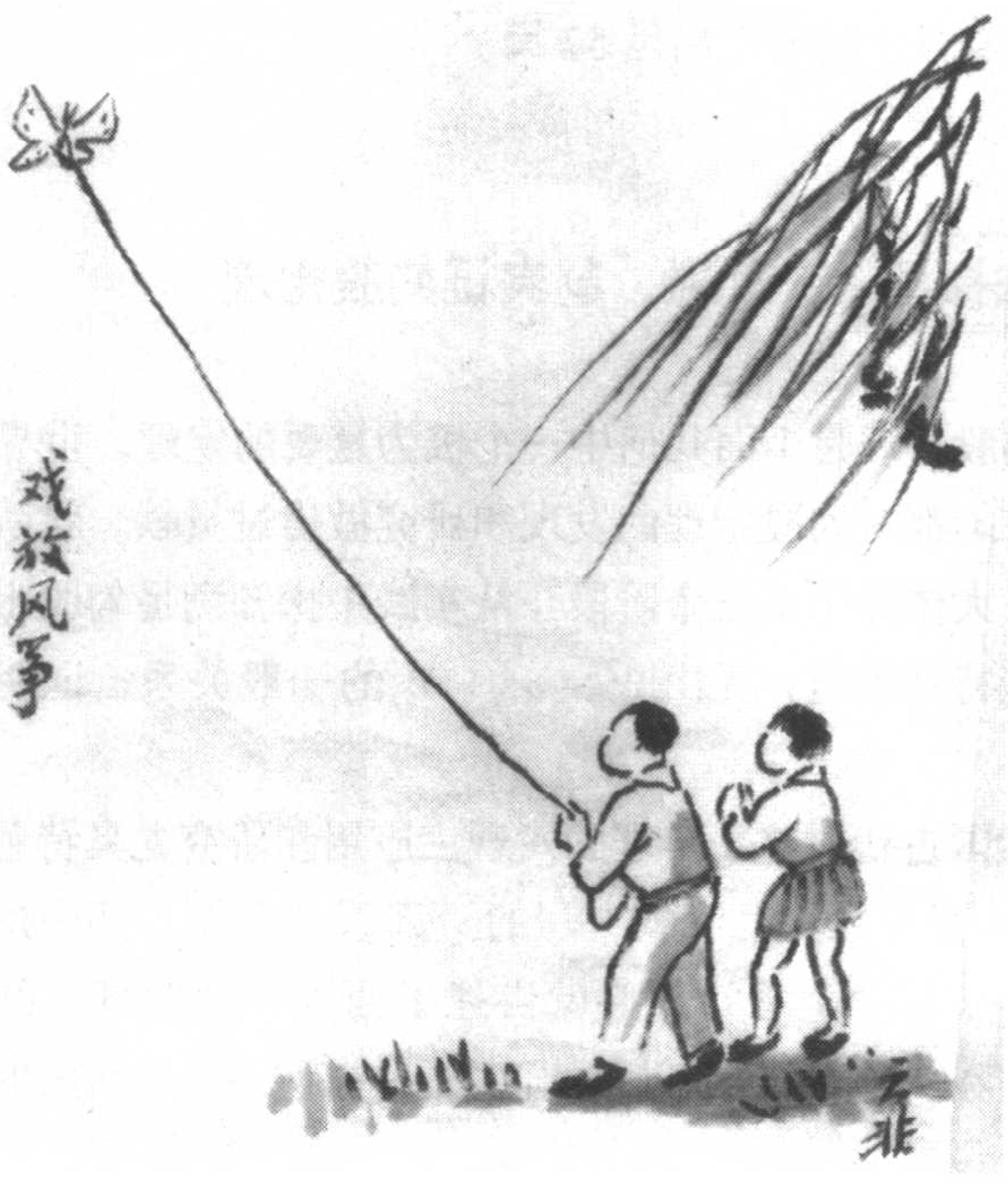
选自陈景润《初等数论》

# 38 戏放风筝

三月清明节气　蒙童戏放风筝　托量九十五尺绳　被风刮起空中　量得上下相应七十六尺无零　纵横甚法问先生　算了多少为平

答曰：五十七尺

选自《算法统宗》



这是个简单的勾股定理应用题。风筝绳长是直角三角形的斜边 $c=95$ 尺，风筝的高度（上下相应）$b=76$ 尺。求风筝在地面上的投影到蒙童之间的距离 $a$ 是多少尺（图 38-1）？

**解**

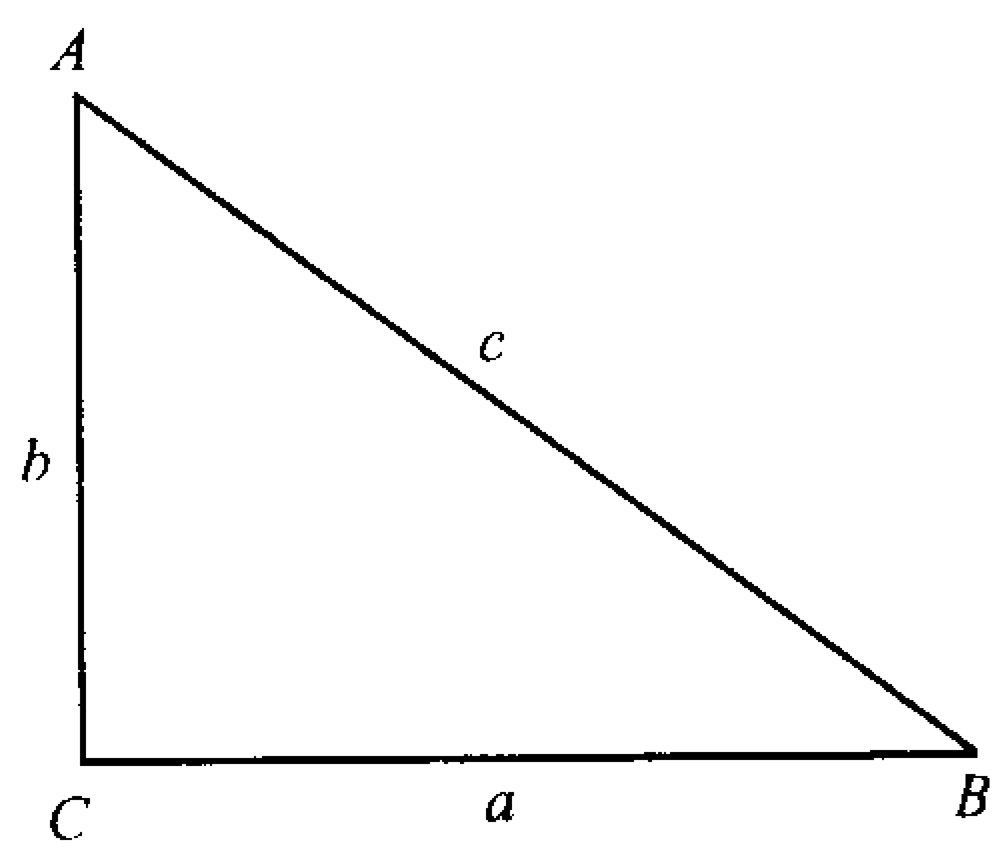



图 38-1

由勾股定理

$$a^2=c^2-b^2$$

$$\begin{aligned}a&=\sqrt{c^2-b^2}\\&=\sqrt{95^2-76^2}\\&=\sqrt{3249}\\&=57(\text{尺})\end{aligned}$$

所以风筝在地面上的投影到蒙童之间的距离是 57 尺。

## 古法探源　刘徽、赵爽证勾股定理

勾股定理是平面几何中一个极为重要的定理。世界上各个文明古国都对勾股定理的发现和研究做出过贡献。就认识过程来说，大体经历了三个阶段：从实践中探知满足勾股定理条件的一些特殊数值；提出 $c^2=a^2+b^2$ 的一般关系；证明这个定理。

我国古代对这个定理的发现、应用和研究尤具特色。

《周髀算经》是汉朝人写的一部天文著作，其中用到了很多数学知识。全书的开头就讲述了西周开国时期（约公元前 1000 年）周公姬旦和商高的问答，在研究测量问题时，商高对周公说："故折矩以为勾广三、股修四、径隅五"。这表明已

经知道边长为 3，4，5 的三角形是直角三角形。

《九章算术》是我国最重要的一部数学著作，成书约在公元 50—100 年，其中大部分内容产生于秦朝以前。书中专设“勾股章”，正式提出勾股定理：“勾股各自乘，并而开方除，即弦”。

$$弦 = \sqrt{勾^2 + 股^2}$$

魏刘徽在注释勾股章时曾用“以盈补虚，出入相补”的办法作过证明，可惜插图失落，后经清朝李潢复原，作成下图，使刘徽的文字注解与图形相结合，“勾自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类”。这样就轻松愉快地证明勾股定理。

赵爽，字君卿，是三国时代吴人，与刘徽是同一时代的数学家，给《周髀》作过注释。在《勾股方圆注》中，用弦图证明勾股定理，对后世的启示很大。他的注解是这样的：“弦图，又可以勾股相乘为朱实（图 38-3（1））；二倍之为朱实四，以勾股之差自相乘，为中黄实，加差实一（图 38-3（2））；亦成弦实（图 38-3（3））。”

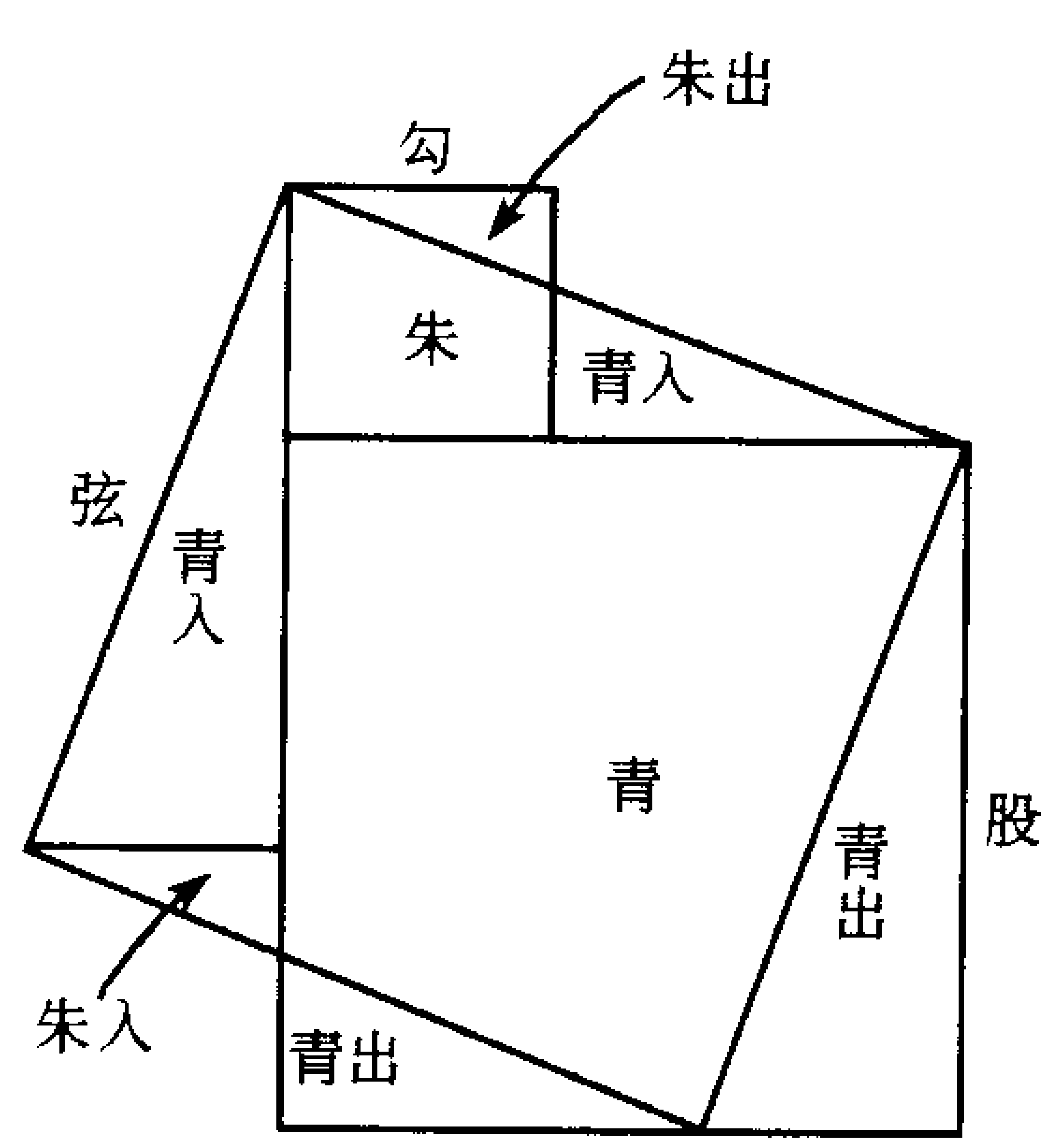



图 38-2

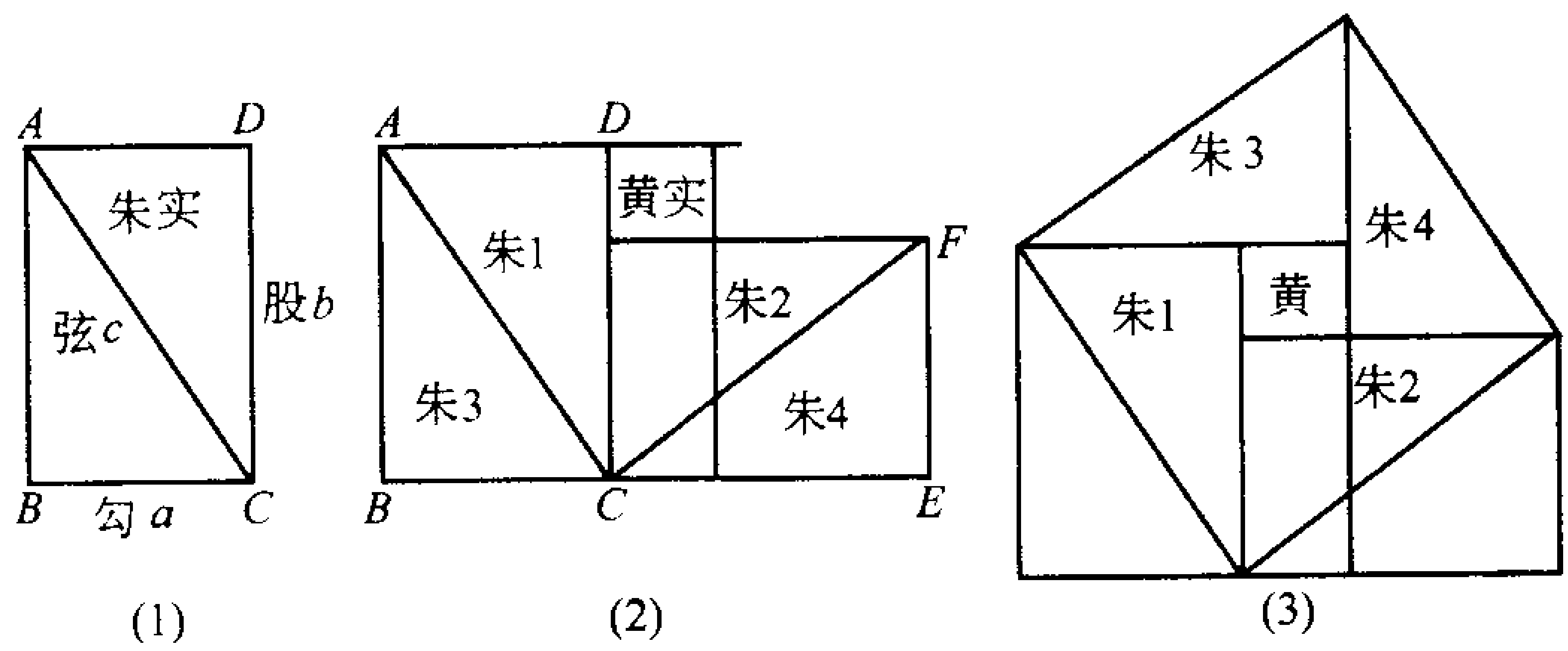



**图 38-3**

图 38-3（1）是：朱实＝勾×股

图 38-3（2）是：2×朱实＋黄实＝勾$^2$＋股$^2$

即

$$2\times 勾\times 股+(股-勾)^2=勾^2+股^2$$

图 38-3（3）是将朱实 2 倍后分为四块，移动朱 3、朱 4 变成弦实。

所以　　勾$^2$＋股$^2$＝弦$^2$

简朴的证明，却道出了一条重要原理：

出入相补原理：把一个平面图形从一处移至他处，面积不变；如果把图形分割成几块，那么各部分面积之和等于原来图形的面积。

很多中外数学家根据这一原理给出了多种证法。它不仅成为训练思维能力的“健身器”，而且其成果又构成一座美丽的数学花园。选载几幅，供读者参考（图 38-4）。

图 38-4（8）是美国第 20 任总统 J.A.Garfied 给出的证明，他利用梯形面积等于 3 个直角三角形面积之和化简而得。

$$\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=2\cdot\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$$

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2)=\frac{1}{2}c^2$$

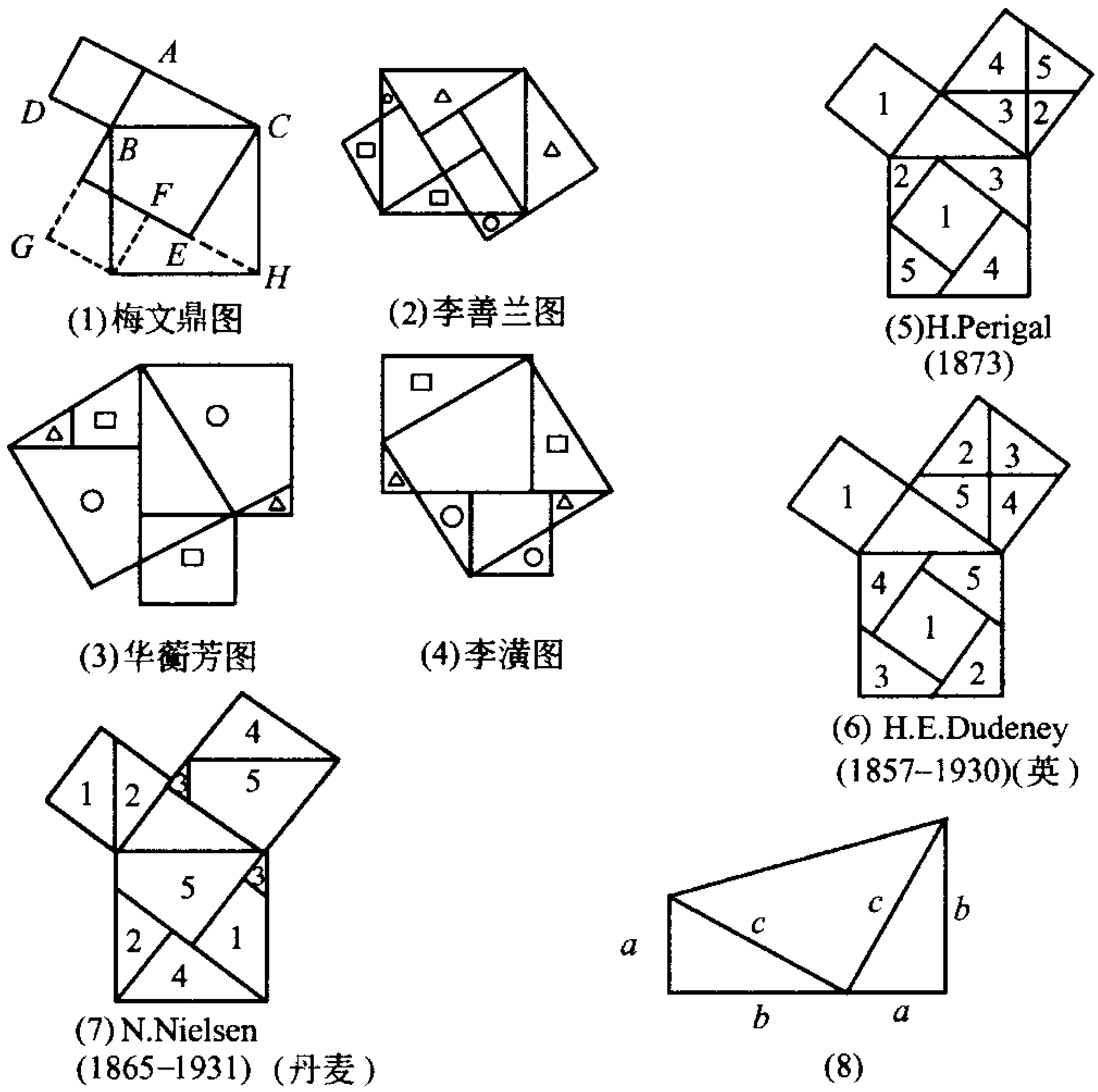



**图 38-4**

所以　$a^2+b^2=c^2$

其实，他的证明只不过是前面赵爽的证明中连接正方形对角线所得的图形而已。

过去一直认为勾股定理是希腊毕达哥拉斯（公元前 569—前 500 年）首先发现并证明的，因而称为毕氏定理。据专家考证，并无明显文字依据。欧几里得（公元前 365—前 300 年）作《几何原本》时论述了勾股定理，并利用等积变换对其进行证明。从相似形出发，用射影定理证明勾股定理的数学家首先是印度的婆什迦罗，然后是意大利的斐波那契。

## 读读练练　　练　习　题

1. 分析图 38-5（1）～（7）的依据。

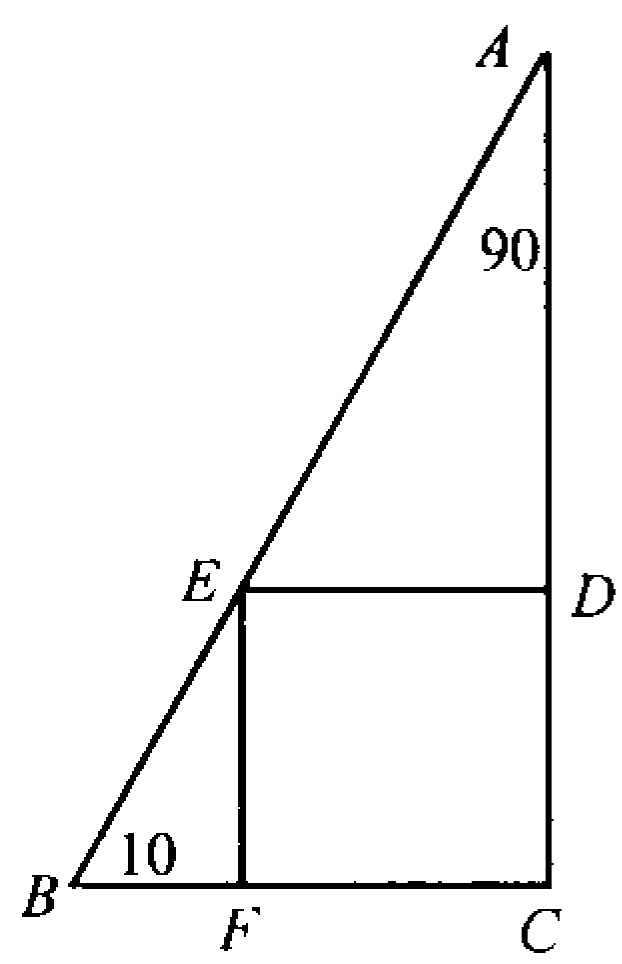



图 38-5

2. 勾股容方

方种芝麻斜种黍　勾股之田十亩无零数　九十（步）股差方为界　勾差十步分明许　借问贤家如何取　多少黍田多少芝麻亩　算的二田无误处　智能才华算中举

答曰：芝麻田 3.75 亩

黍田 6.25 亩

选自《九章算法比类大全》

提示：$DE^2 = AD \cdot EF$　1 亩 = 240 平方步

# 39 葭生中央

今有池一方，葭生其中央，出水一尺。引葭赴岸，适与岸齐。问水深、葭长各几何？

答曰：水深一丈二尺；葭长一丈三尺

选自《九章算术》



葭（jiā）是指初生的芦苇。现有方池一个，边长1丈，芦苇生在其中央，露出水面1尺，把芦苇引到池边，芦苇的顶端刚刚不碰到岸边。问水深、芦苇长各是多少?

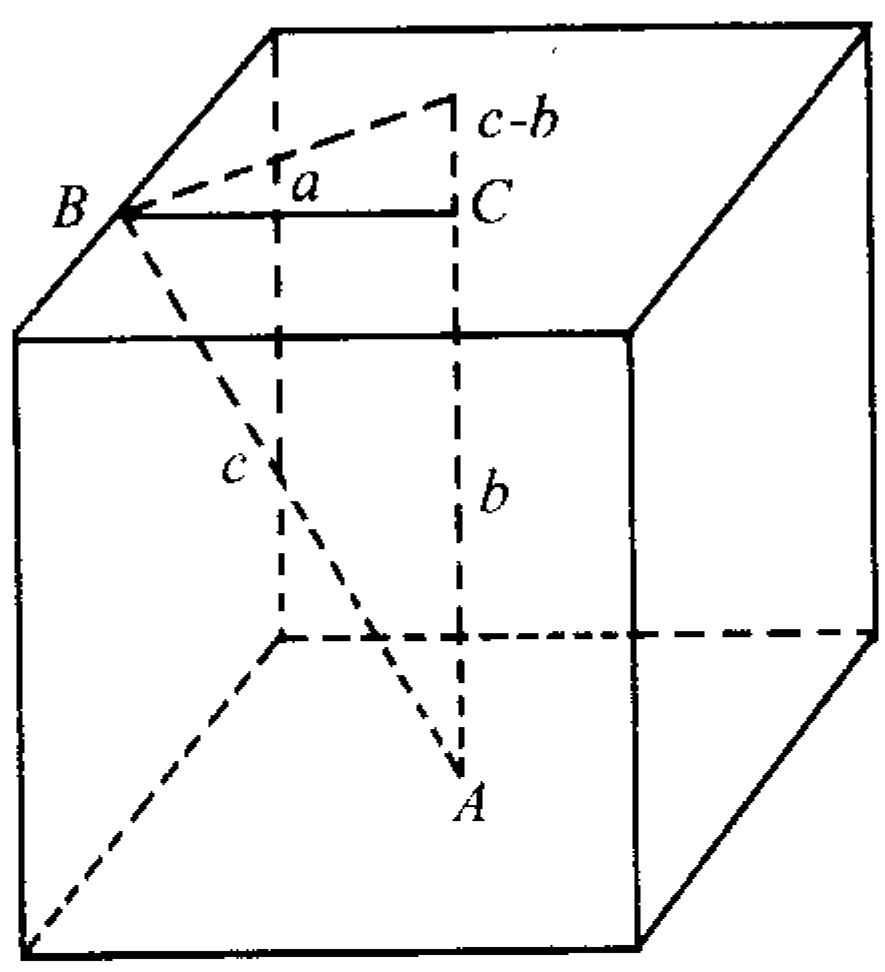



图 39-1

**解法1** 代数法

刘徽把方池边长的一半作为勾 $a$，水深为股 $b$，葭长为弦 $c$，本题归纳为“已知勾及股、弦差，求股和弦”的类型(图39-1)。

因为 $a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b)$ (39-1)

$$c+b=\frac{a^2}{c-b},\text{而}(c+b)+(c-b)=2b$$

所以 $$b=\frac{(c+b)-(c-b)}{2}=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)} \quad (39-2)$$

已知 $a=5$，$c-b=1$；代入（39-2）得

所以 $b=12(\text{尺}),c=b+(c-b)=13(\text{尺})$ (39-3)

**解法2** 中算古法

术曰：半池方自乘，以出水一尺自乘，减之，余，倍出水除之，即得水深，加出水数，得葭长。

这实质上就是公式（39-2）和（39-3），而其关键是证明公式（39-1）即

$$c^2-b^2=(c-b)(c+b)$$

用出入相补法，从图39-2中一看便知。

设正方形 $ABCD$ 边长为 $c$，正方形 $AKHG$ 的边长为 $b$，则 $c^2-b^2=S_{KBCDGH}=S_{KBIH}+S_{ICDG}=S_{DGEF}+S_{ICDG}=S_{ICEF}$

即 $$c^2-b^2=(c+b)(c-b)$$

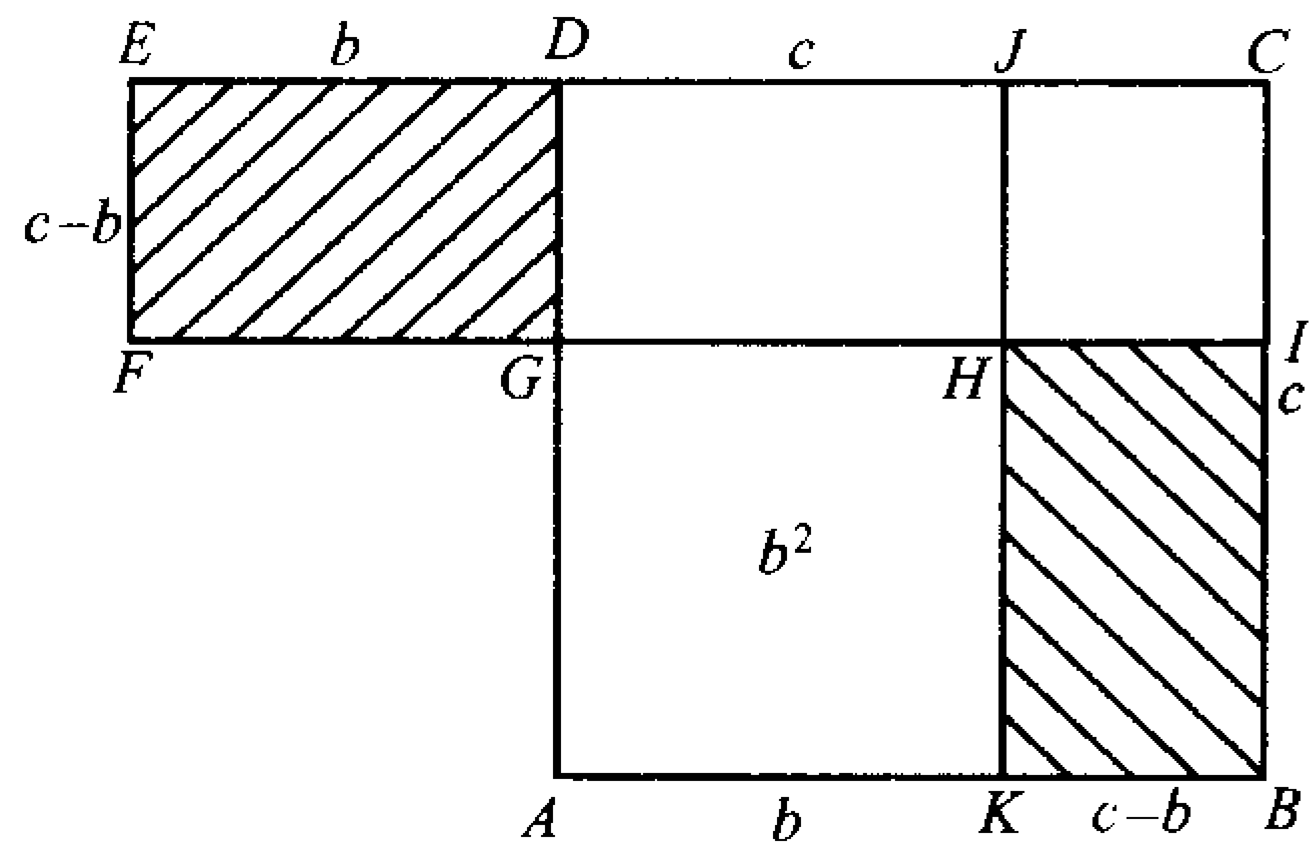



图 39-2

这就是 $a$，$c+b$，$c-b$ 三者已知其二可求另一，成了此类题转换的关键（下略）。

## 古往今来 欧几里得证勾股定理

欧几里得（Euclid）在《几何原本》卷 1 中证明了勾股定理，这一证明过程是平面几何中的经典内容。二千多年来，世界各国的教科书都以不同的形式介绍了欧氏的证明。从数学思想上说，它立足于分割图形、合同变换等综合手段，与刘徽的思想是神脉相通的。即使在今天的初中几何里，欧氏的思想方法甚至图形本身仍然广为采用，不仅如此，还衍生出许多形式各异、难度较大的习题来。

设直角三角形 $ABC$ 中（图 39-3），$\angle C$ 是直角，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，分别以 $a$、$b$、$c$ 为边，向外作正方形，则

$$BC=a, AC=b, AB=c$$

$$S_{ABDE}=c^2, S_{BCGF}=a^2 \quad S_{ACHI}=b^2$$

容易证明

$$\triangle ACE \cong \triangle AIB$$

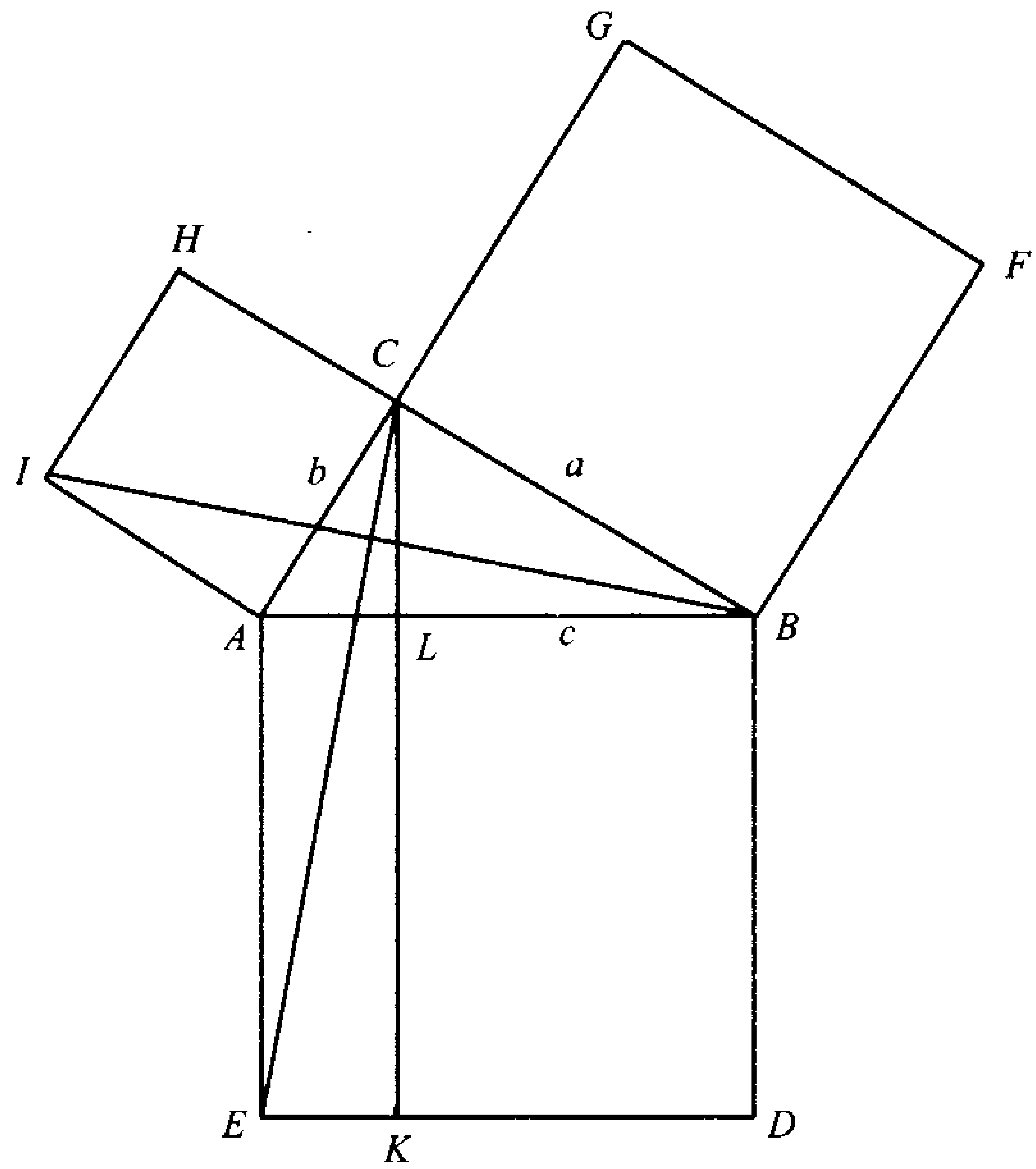



图 39-3

作 $CL \perp AB$，交 $ED$ 于 $K$，则 $CK \parallel AE$。

在$\triangle AEC$ 中，如果把 $AE$ 作底，则 $AE$ 边上的高等于 $EK$。

$$S_{\triangle AEC} = \frac{1}{2} AE \times EK = \frac{1}{2} S_{矩形AEKL}$$

$$所以 \quad S_{矩形AEKL} = 2S_{\triangle AEC}$$

另一方面，$\angle ACB = \angle ACH = 90°$，$B$、$C$、$H$ 三点共线，并且 $BH \parallel AI$，在$\triangle AIB$ 中，如果把 $AI$ 作底，则 $AI$ 边上的高等于 $AC = b$。

$$S_{\triangle AIB} = \frac{1}{2} AI \times AC = \frac{1}{2} b^2 = \frac{1}{2} S_{正方形AIHC}$$

$$所以 \quad S_{矩形AEKL} = S_{正方形AIHC}$$

同样可证　$S_{矩形BDKL}=S_{正方形BCGF}$

$$S_{正方形AIHC}+S_{正方形BCGF}=S_{矩形AEKL}+S_{矩形BDKL}=S_{正方形ABDE}$$

所以　$a^2+b^2=c^2$

欧几里得就用这样的方法证明了勾股定理。这个证明传遍世界、流芳千古。它是建立在欧氏几何逻辑演绎的基础之上的，与刘徽、赵爽的证明风格迥异、各有千秋，读者可以从中品味这两种几何体系的特色。

**读读练练**　　**练　习　题**

分析程大位“归除平方带纵歌”的依据。

平方带纵法最奇　四倍积步不须疑　纵多自乘加积步

又用开方法除之　再以纵多并开积　折半方好长数施

若问阔步知多少　将长减却纵多基

即已知矩形的面积为 $s$，长 $x$ 比阔 $y$ 多 $x-y=a$（纵多）求长 $x$ 和阔 $y$（图 39-4）。

实际上程大位导出了方程

$$x^2-ax=s$$

的解是

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2+4s}}{2}$$

请加以证明。

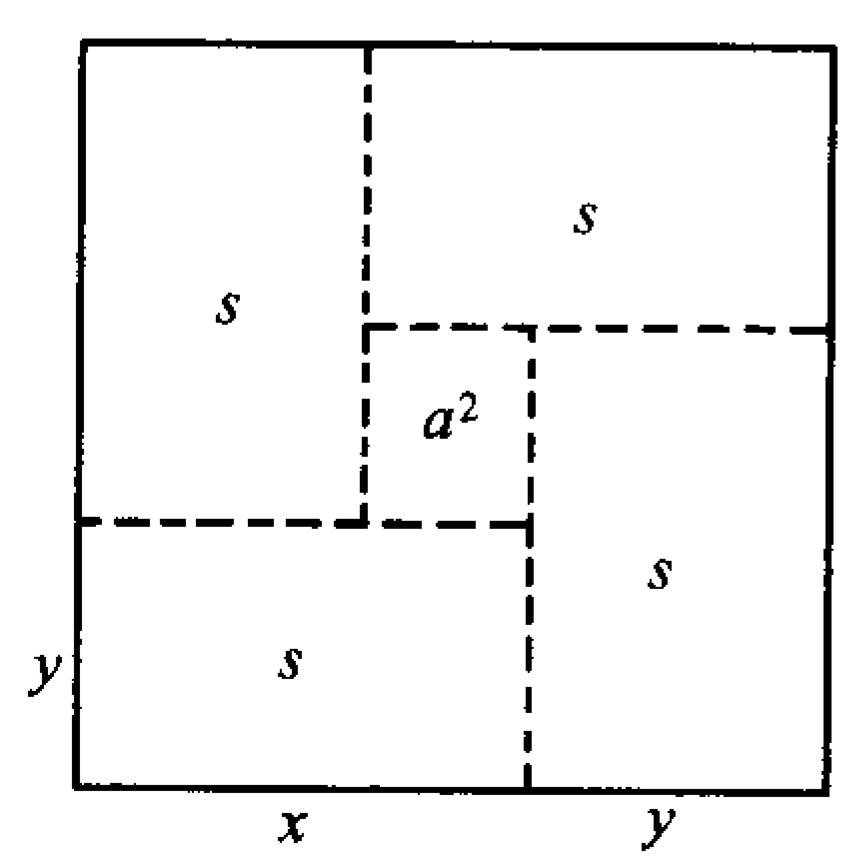



图 39-4

# 40 竹折抵地

今有竹高1丈，末折抵地，去本三尺。问折者高几何？

答曰：四尺二十分尺之十一

选自《九章算术》



今有竹垂直于地面，原高 1 丈，折断后竹梢触地，触点离根部 3 尺。问折断处的高是多少？

这是勾股定理的一个简单的应用题。即在直角三角形 $ABC$ 中，已知 $a=3$，$b+c=10$，求 $b$（图 40-1）。

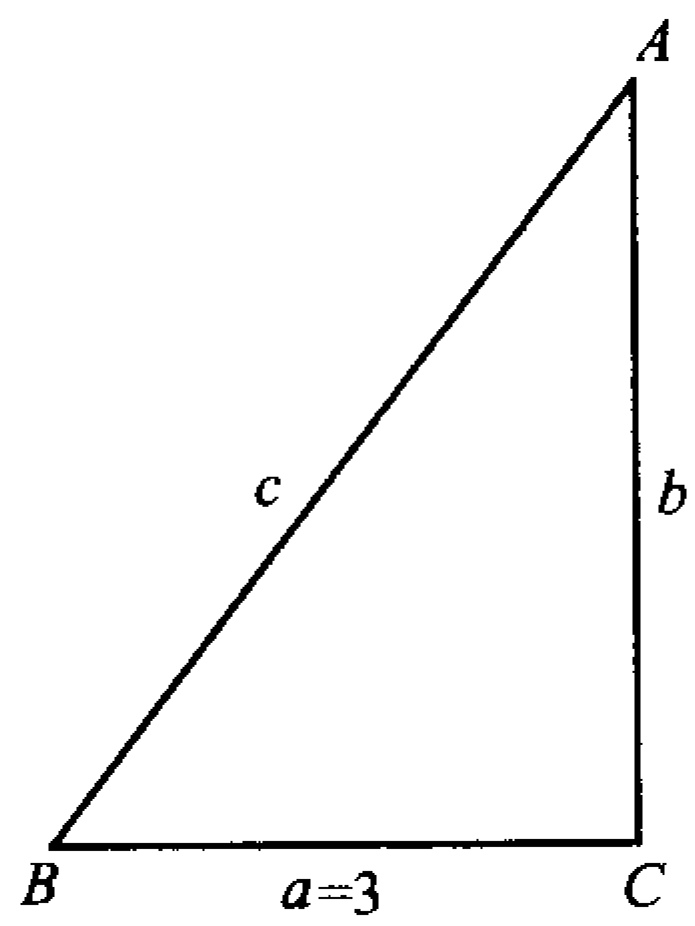



图 40-1

事实上，因为

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b) \tag{40-1}$$

$$c - b = \frac{a^2}{c+b}$$

$$b = \frac{1}{2}[(c+b)-(c-b)] = \frac{1}{2}[(c+b) - \frac{a^2}{c+b}]$$

$$= \frac{(c+b)^2 - a^2}{2(c+b)} \tag{40-2}$$

将 $a=3$，$b+c=10$ 代入（40-2），得

$$b = \frac{10^2-9}{20} = 4\frac{11}{20}\ （尺）。$$

**中算典籍**　　**《张丘建算经》**

张丘建本人的身世不详。《张丘建算经》大约写于公元 468－486 年间。全书分上、中、下三卷，按《九章算术》的体例，以主题、答数和术文的顺序写作的。全书共有 102 题，是在《九章》基础上的创新之作。全书从分数运算开头，题型虽然与《九章》类似，但运算技巧有所提高，思维的难度和深度都有所增大。该书思路拓宽排旧立新，像“封山周栈”、“三

兵巡营”、“百鸡问题”等，不仅在理论上有创新，而且对后世影响深远，有的题已成为世界名题，吸引了几代数学家对其研讨、解析，从而推进数学理论的创新。沈康身说：“《张丘建算经》是《九章算术》推陈出新之作”。清人阮元评论说：“详观张丘建之书，盖出于九章而得其精微者。”比利时学者在分析“百鸡问题”时认为“惊人的事实说明，他深知这些解之间的关系。”

**读读练练**

## 练 习 题

1. 今有葭生于池中，出水三尺，去岸一丈。引葭趋岸，不及一尺，问葭长及水深各几何？

答曰：葭长一丈五尺，水深一丈二尺

选自《张丘建算经》

2. 折竹抵地

今有竹高一丈　园中出众高强　只因有病被虫伤
节节相连不长　风折枯梢在地　离根三尺曾量
枯梢折竹数明彰　激恼先生一晌

答曰：4.55 尺。

选自《九章算术比类大全》

# 41 三斜求积

**问沙田一段，有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里。里法三百步，欲知为田几何？**

**答曰：田积三百一十五顷**

**术曰：以少广求之。以小斜幂，并大斜幂，减中斜幂，余半之，自乘于上。以小斜幂乘大斜幂，减上，余四约之，为实。一为从隅，开平方，得积。**

选自《数书九章》

如图 41-1，在△$ABC$ 中，设大斜 = $a$，中斜 = $b$，小斜 = $c$，$a>b>c$，△面积记为 $S_{\triangle ABC}$。

这是著名的秦九韶“三斜求积”的原题（图 41-1）。在这里，秦氏提出了著名的“三斜求积公式”，即已知不等边三角形的三边分别为大斜、中斜、小斜（简记为大、中、小），那么，这个三角形的面积为：

$$(\triangle\text{面积})^2=\frac{1}{4}\left[\text{小}^2\cdot\text{大}^2-\left(\frac{\text{大}^2+\text{小}^2-\text{中}^2}{2}\right)^2\right] \tag{41-1}$$

用学校里常用的符号表示：


欽定四庫全書
數學九章
秦九韶 撰
三十五石七斗和買
四分八釐七毫五絲
七毫五絲紬絹折綿
紬絹本色二十匹二

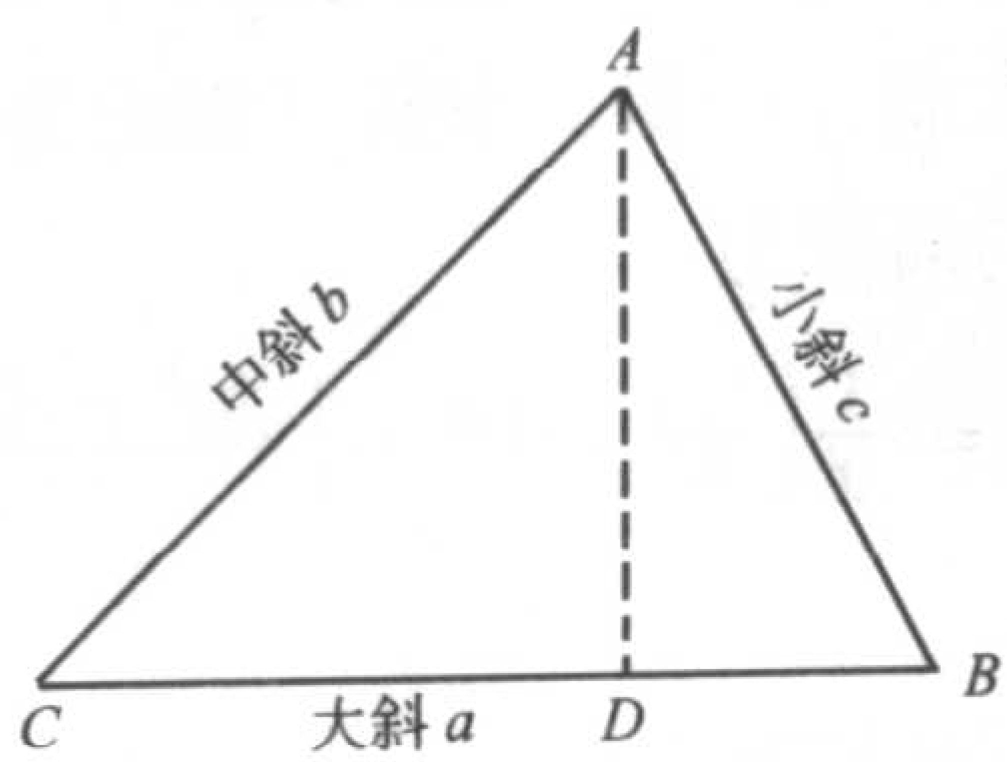



图 41-1

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2} \qquad (41-2)$$

将 $a=15$，$b=14$，$c=13$ 代入公式（41-1）：

$$S^2_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}\left[15^2 \times 13^2 - \left(\frac{15^2+13^2-14^2}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}[225 \times 169 - \frac{1}{4}(225+169-196)^2]$$

$$= \frac{1}{4}(38025 - 9801) = 7056$$

所以 $S_{\triangle ABC}=84$（里$^2$）

按照题设条件，1 里＝300 步，1 亩＝240 步$^2$，100 亩＝1 顷，所以

$S_{\triangle ABC}=84\times 300^2=7560000$（步$^2$）＝31500（亩）＝315（顷）

## 古法探源　秦九韶三斜求积与海伦公式

秦九韶在《数书九章》第三章田域类提出了已知三角形三边求面积的“三斜求积”题，给出一般的计算公式，这是对几何学的一大贡献。但由于诸多原因秦氏证明失传。如何根据中国几何的特色补出秦氏公式的证明，是众多学者研究、探讨的热点。

吴文俊先生在《出入相补原理》一文中，作了补证。他利用直角三角形中古人常用的公式（见“折竹求高”题）

$$股 = \frac{股弦和^2 - 勾^2}{2\times 股弦和} \qquad (41-3)$$

脱手而出，古韵古风，简朴自然。现作简单的介绍（图 41-2,

图 41-3)。

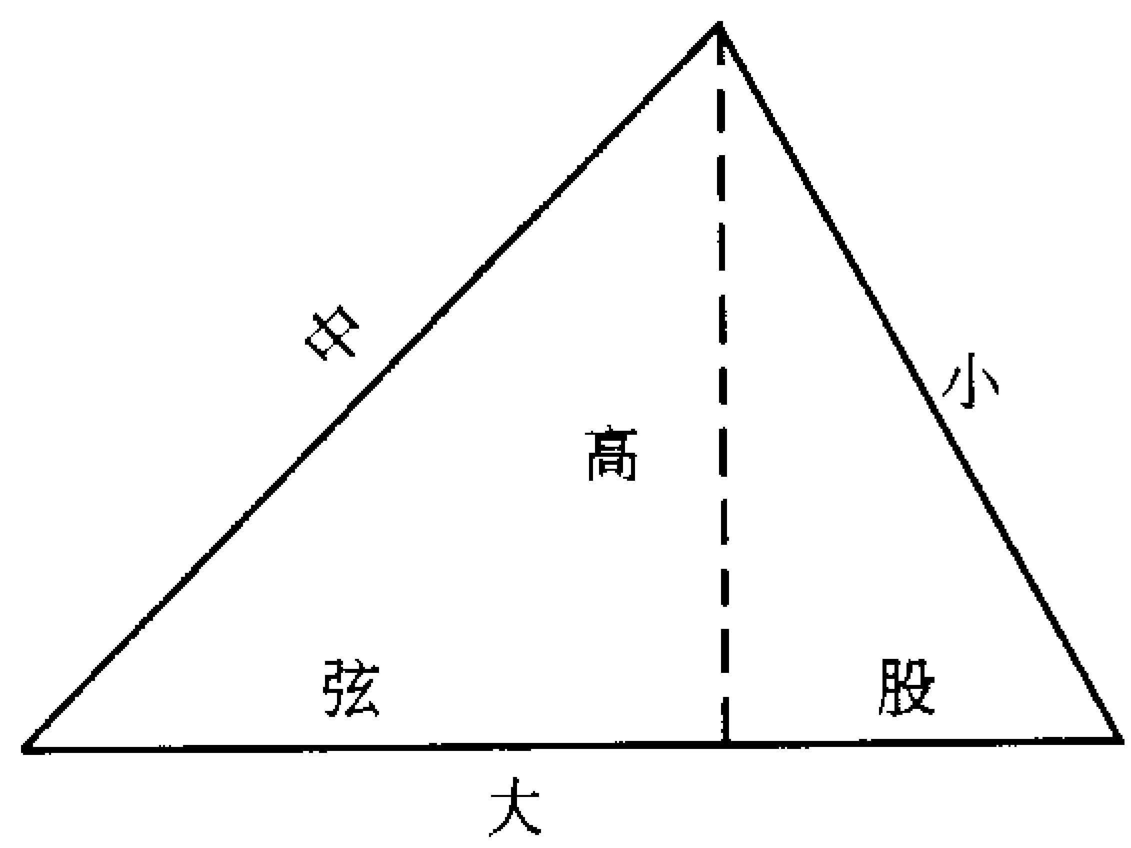



**图 41-2**

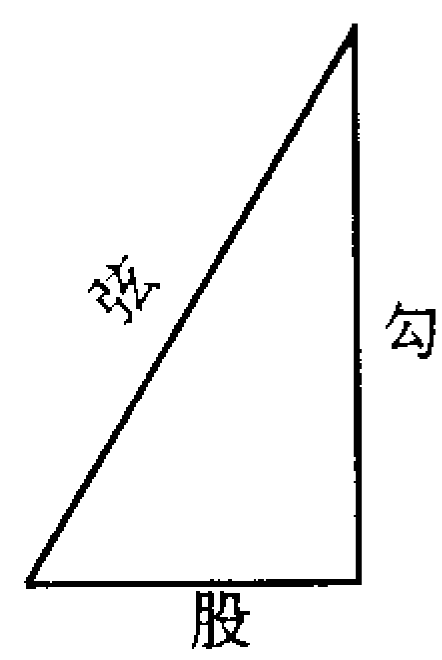



**图 41-3**

我们按吴先生的原型给出证明，让大家了解一点中国几何的特色。

如图，因为三角形面积 $=\frac{1}{2}\text{大}\times\text{高}$，

那么 $$\text{面积}^2=\frac{1}{4}\text{大}^2\times\text{高}^2 \qquad (41-4)$$

作大边上的高，把大边分为两段，比较长的一段为弦，较短的一段为股；作一辅助直角三角形，将另外一边称为勾（如图 41-3），

这时有：

$$\text{大}=\text{股}+\text{弦}=\text{股弦和} \qquad (41-5)$$

$$\text{勾}^2=\text{弦}^2-\text{股}^2=(\text{中}^2-\text{高}^2)-(\text{小}^2-\text{高}^2)$$
$$=\text{中}^2-\text{小}^2$$

又由 (41-3) 式知

$$\text{股}=\frac{\text{股弦和}^2-\text{勾}^2}{2\times\text{股弦和}}=\frac{\text{大}^2-(\text{中}^2-\text{小}^2)}{2\times\text{大}}$$

而

$$\text{高}^2=\text{小}^2-\text{股}^2=\text{小}^2-\left(\frac{\text{大}^2+\text{小}^2-\text{中}^2}{2\times\text{大}}\right)^2 \qquad (41-6)$$

将（41-6）式代入（41-4）式即得

$$\text{面积}^2=\frac{1}{4}\text{大}^2\times\left[\text{小}^2-\left(\frac{\text{大}^2+\text{小}^2-\text{中}^2}{2\times\text{大}}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\text{小}^2\times\text{大}^2-\left(\frac{\text{大}^2+\text{小}^2-\text{中}^2}{2}\right)^2\right]$$

这就是秦九韶“三斜求积”的公式。

这个证明的妙处是移出形外，另作一个辅助的直角三角形。由“勾”作桥梁，用上《九章算术》中解直角形的成果化难为易、水到渠成。所以吴先生说：“按秦氏公式的形式十分古怪，当是依某种思路自然引导到这一形式的。上面的证法颇为自然，也符合我国古代几何的传统特色，说它是原证，也是不无可能的。”

广大中小学生都知道已知三角形三边 $a$，$b$，$c$ 求其面积的“海伦公式”，并在练习中常常使用。这两个公式是否是各自独立发明的还不很清楚。吴文俊先生的观点十分明确，可以帮助我们澄清一些是非：

“在西方有所谓的海伦公式：三角形面积 $=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$。这一公式形式十分漂亮。正因为这样，如果已知海伦公式而再来推出秦氏公式，将是不可思议的。相反，从秦的公式化简成海伦的公式却是比较自然的发展。

据此我们至少可以断言，秦的公式是独立于海伦公式而来的。

关于海伦的生平，从公元前 2 世纪到公元后 10 世纪，数学史家聚讼纷纭。至于海伦留传到现在的著作，也已经人指出，历代都重新编纂。有所增改，已经不是本来面目。这是熟

悉希腊数学史的应予澄清的事，这里就不考虑了。”

引了吴先生很长的一段话，就是让大家心中有“底”：老一辈数学家在从事高深研究的同时，还为中小学教育释疑解难，这种精神可敬可佩。

读读练练 **练　习　题**

1. 将秦九韶公式化简成海伦公式，并进一步化简成：

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

2. 利用余弦定理证明秦九韶公式。

# 42 窥望海岛

**今有望海岛，立两表，齐高三丈，前后相去千步，令后表与前表三相直。从前表却行一百二十三步，人目着地，取望岛峰，与表末三合，从后表却行一百二十七步，人目着地，取望岛峰，亦与表末三合，问：岛高及去表各几何？**

**答曰：岛高四里五十五步，去表一百二里一百五十步**

选自《海岛算经》

现有人测望海岛，立两标杆各高 3 丈，前后距离 1000 步，并使两标杆与海岛顶峰在同一平面内，从前标杆向后退 123 步，人目着地，前视岛峰恰好与标杆顶点在一直线上。从后标杆向后退 127 步，人目着地，前视岛峰，也恰好与标杆顶点在一直线上，问岛高、岛与前标杆距离各是多少（图 42-1）？

《海岛算经》是刘徽注解《九章算术》勾股章以后，对书中测量术继续深入研究的成果，所用的方法基本上是通过面积“出入相补”得到了公式：

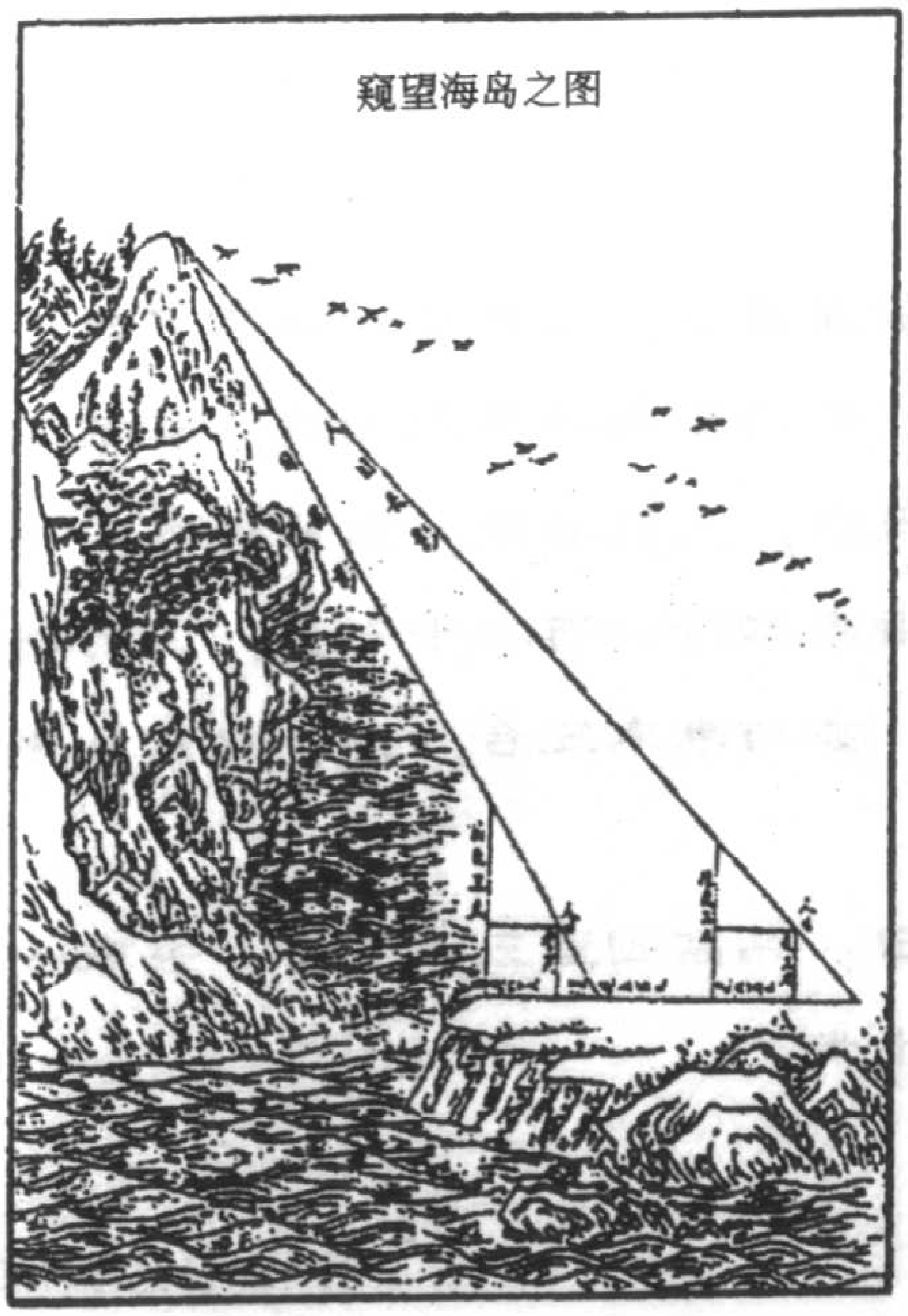



图 42-1

岛高 $e=\dfrac{af}{c_2-c_1}+a$，岛与前标杆的距离 $b=\dfrac{c_1 f}{c_2-c_1}$

**解法 1　中算古法**

我们用出入相补法来证明刘徽的两个公式。

设岛高 $AM=e$，标杆长为 $a$，人目在 $B$、$C$ 位置，如图 42-3 所示，$c_1=DB$，$c_2=HC$.

先证明有关矩形面积的一个重要性质，见图 42-2。

矩形 $ABCD$（简记为□$AC$），以对角线上任意一点 $M$ 作两边的垂线，将矩形分为 6 块，容易看出

$$□AM = □MC \qquad (42-1)$$

所以

$$bc = ad \qquad (42-2)$$

(42-1)，(42-2) 是证明中常用的关系。

在图 42-2 的基础上作成如图 42-3 的矩形图，取 $PQ = c_1$，作一辅助矩形□$PS$，则

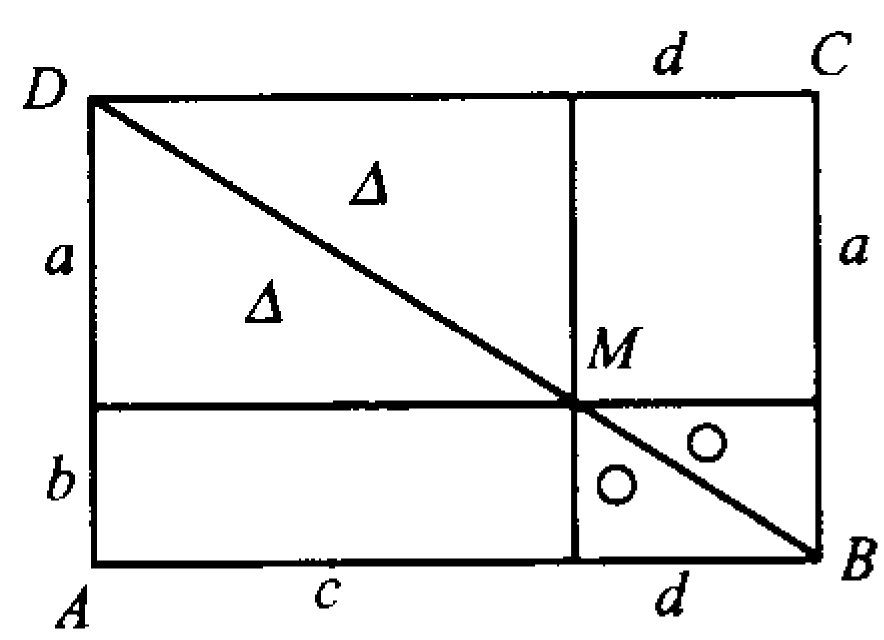



图 42-2

$$\Box PS = \Box NG \qquad (42-3)$$

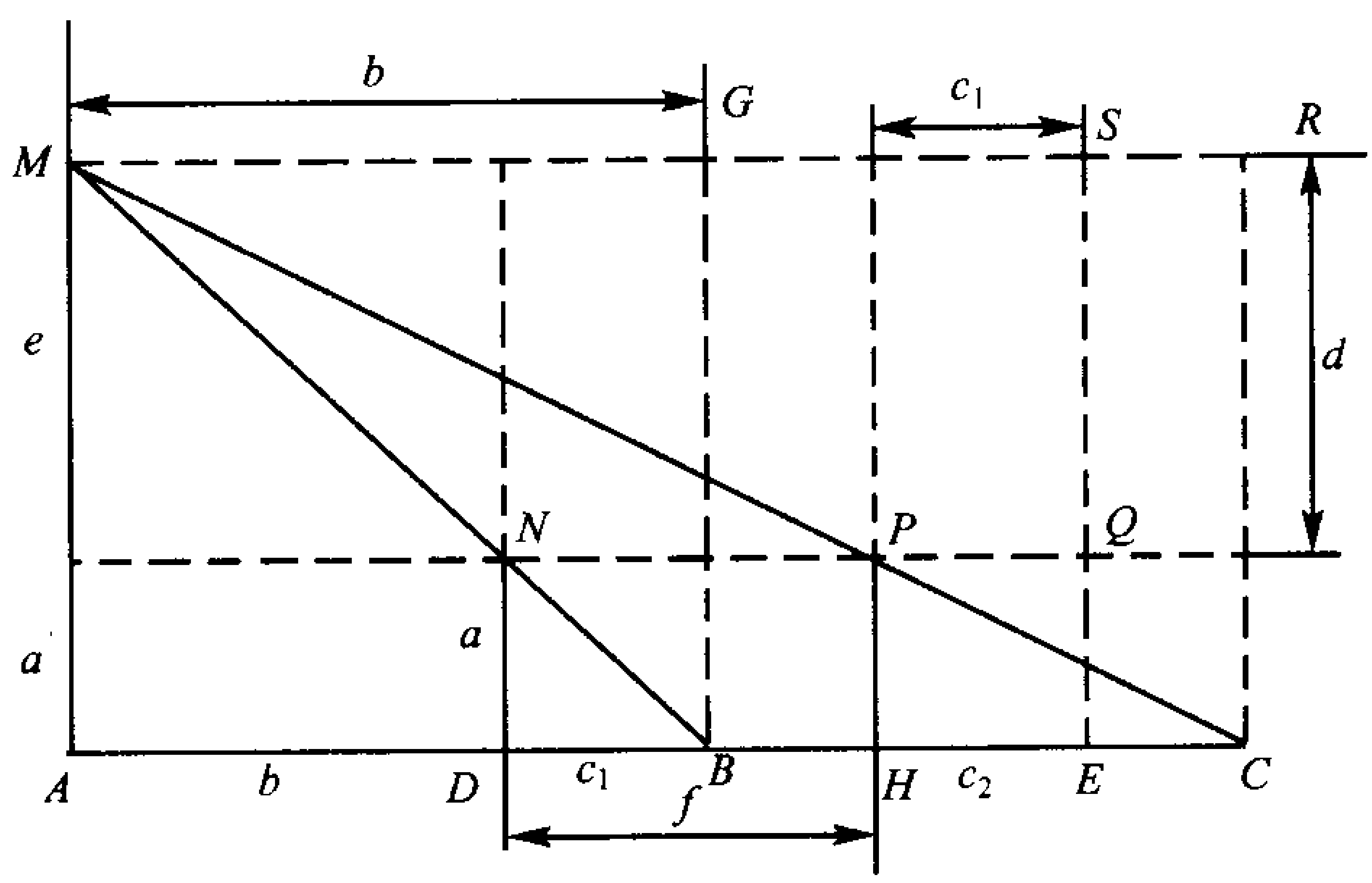



图 42-3

在矩形□$AR$ 中，有

$$\Box AP = \Box PR \qquad (42-4)$$

在矩形□$AG$ 中，有

$$\Box AN = \Box NG \qquad (42-5)$$

(42-4) －(42-5) 式，并用 (42-3) 式代换：

$$\Box AP - \Box AN = \Box PR - \Box NG = \Box PR - \Box PS$$

所以 $\Box DP = \Box QR$，即

$$af = d(c_2 - c_1), d = \frac{af}{c_2 - c_1} \quad (42\text{-}6)$$

$$e = d + a = \frac{af}{c_2 - c_1} + a$$

又由（42-5）式知

$$ab = c_1 d, b = \frac{c_1 d}{a} = \frac{c_1 f}{c_2 - c_1}$$

**解法 2**　三角函数法

利用高中三角函数的知识来解这道题，也是很容易的。

如图 42-4

$$\cot\alpha = \frac{c_1}{a}, \cot\beta = \frac{c_2}{a}$$

$$e\cot\alpha = AB, e\cot\beta = AC$$

$$e(\cot\beta - \cot\alpha) = BC$$

而

$BC = f + c_2 - c_1$，即

$$e \cdot \frac{c_2 - c_1}{a} = f + c_2 - c_1$$

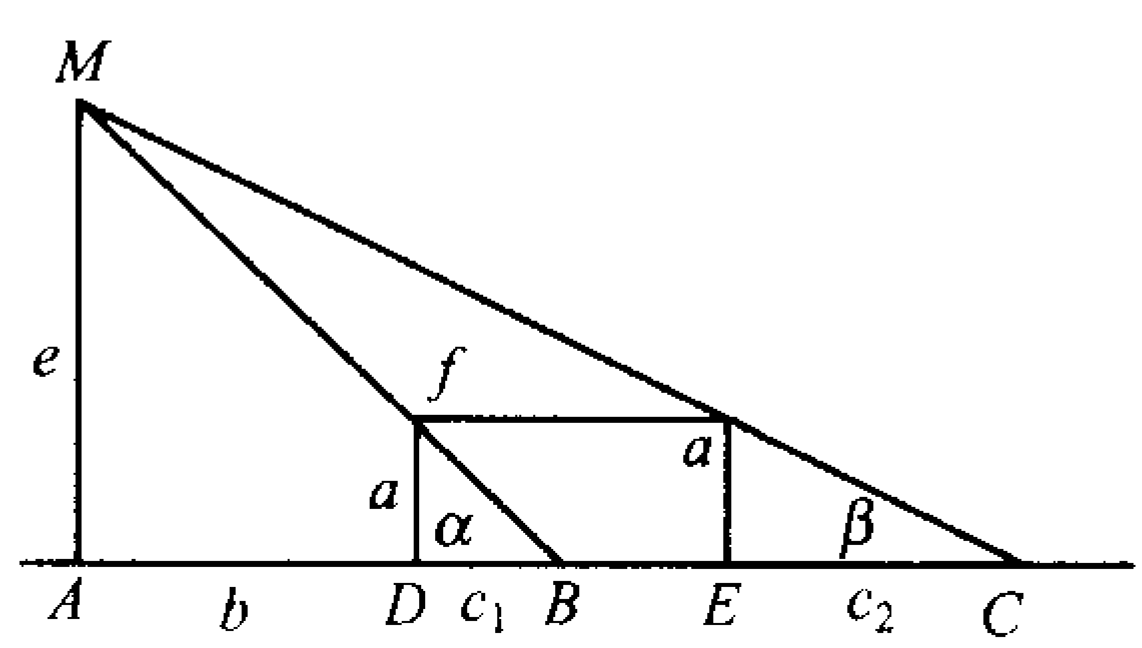



图 42-4

所以

$$e = \frac{af}{c_2 - c_1} + a \quad (42\text{-}7)$$

$$AD = e\cot\alpha - c_1 = \frac{c_1}{a}\left(\frac{af}{c_2 - c_1} + a\right) - c_1 = \frac{c_1 f}{c_2 - c_1} \quad (42\text{-}8)$$

以步为单位进行计算：

$a=3$ 丈 $=5$ 步，$c_1=123$ 步，$c_2=127$ 步，$f=1000$ 步

所以 $e=\dfrac{5\times 1000}{127-123}+5=1255$（步）$=4$（里）55（步）

$$b=\frac{123\times 1000}{127-123}=30750\text{ 步}=102\text{（里）}150\text{（步）}$$

## 古法探源　　刘徽的重差法

“表测海岛”是一道名题。测量底部可以到达的物体的高度。我们用一根标杆，通过相似直角三角形对应边成比例的法则，就可解决问题了。而对于底部不可到达的物体的高度，用一对相似直角三角形就不能解决问题了。这样，就需要两个相似直角三角形，通过两标杆之间可测的距离来计算未知物体的高度。“表测海岛”就是一道具有代表性的例题。刘徽称这一法为重差法则，它是《九章》中勾股理论的延续和发展，是世界同类工作之最。刘徽自己也说：“辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于勾股之下，度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望。触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入。博物君子，详而览焉。”刘徽把他在这方面的研究成果写成《海岛算经》，附在《九章》之后。原著有文有图，后来图失传了。19 世纪初，李潢作《九章算术细草图说》、《海岛算经细草图说》时为重差补图。其后，有众多数学家研究和发展了“重差”理论，成果累累，恕不细说。

现在，在学了三角函数后解这类题方便多了。我们学习古法，重在领会思想，灵活运用，不要拘泥于一技一法。

读读练练

# 练 习 题

1. 有山居木西，不知其高。山去木五十三里，木高九丈五尺，人立木东三里，望木适与山峰斜平，人目高七尺。问山高几何（图 42-5）？

答曰：一百六十四丈九尺六寸太半寸

选自《九章算术》

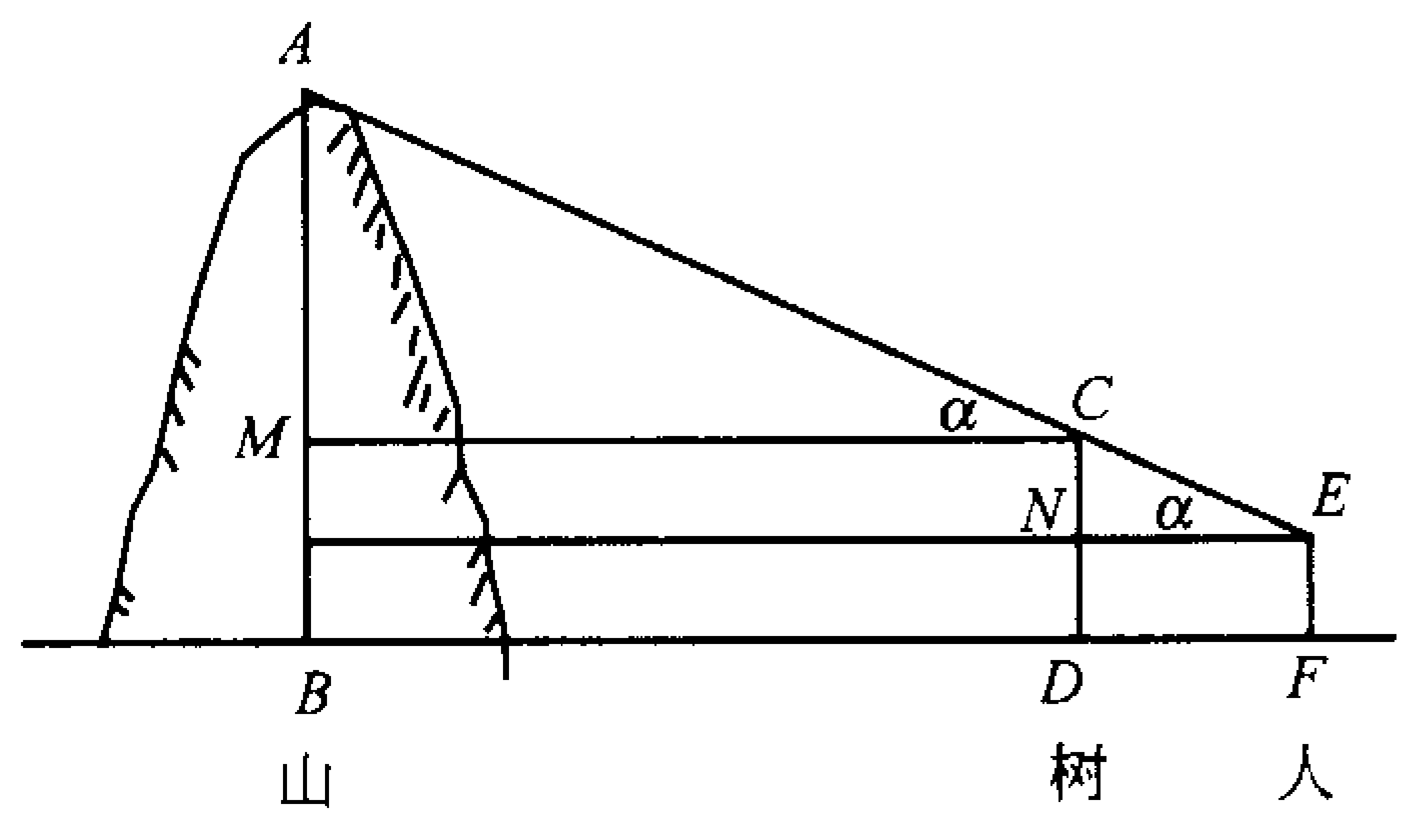



图 42-5

2. 有人测望山上松树，树高不知。先立二标杆，高为 2 丈，相距 50 步，且标杆、松树共面。从前杆后退 7 步 4 尺，人目着地视前树顶与杆顶在同一直线上。前视树根，视线截标杆顶点以下 2 尺 8 寸。从后杆退行 8 步 5 尺，人目着地，前视树顶，与标杆顶在一直线上（图 42-6）。问松树高是多少？山与前杆的距离是多少？

答：松树高 12 丈 2 尺 8 寸，山与前杆的距离是 1 里 28 $\frac{4}{7}$ 步

选自《海岛算经》（今译）

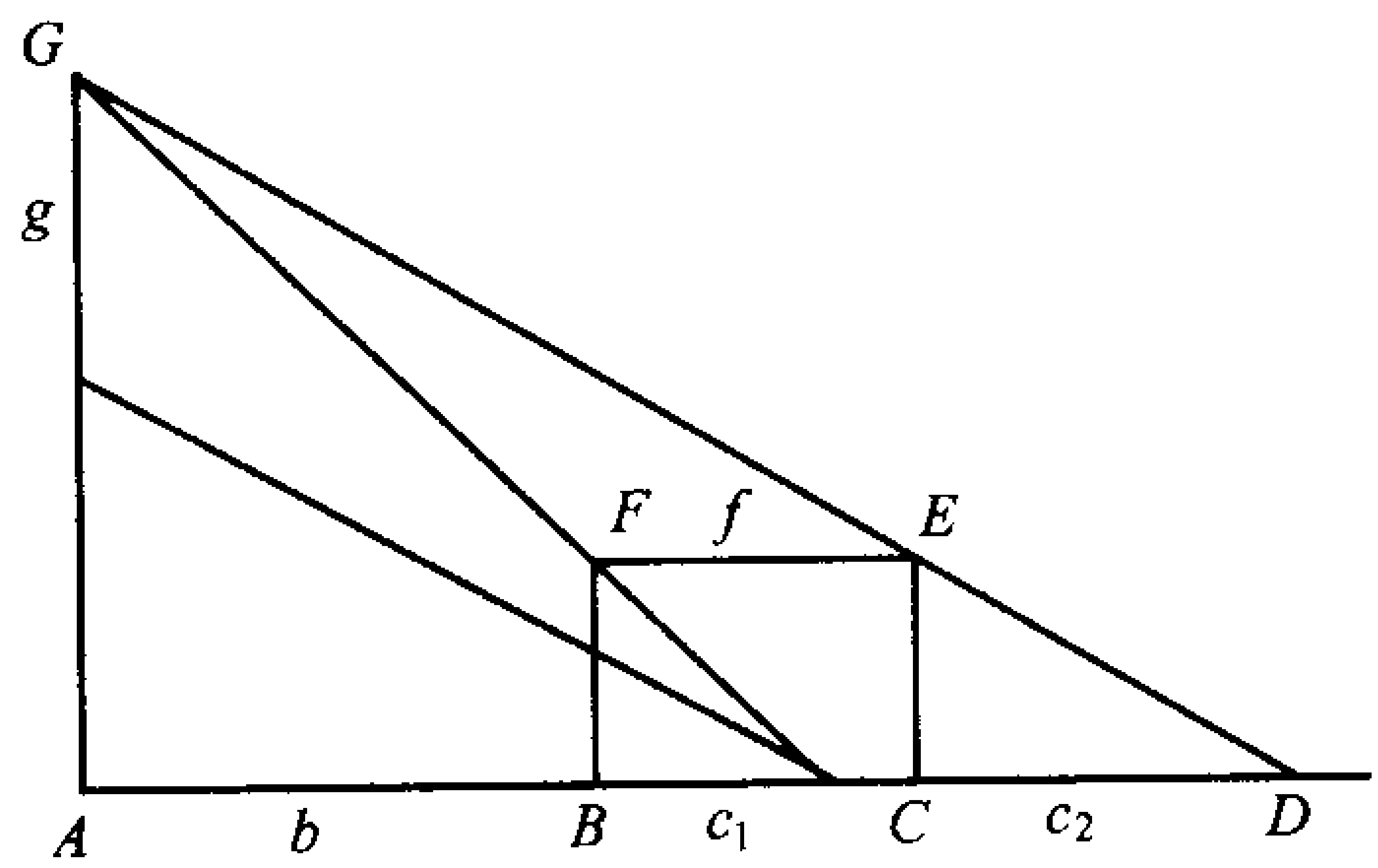



图 42-6

# 43 望敌远近

问敌军处北山下原，不知相去远近。乃于平地立一表，高四尺，人退表九百步（步法五尺），遥望山原，适与表端参合。人目高四尺八寸。欲知敌军相去几何？

答曰：一十二里半

选自《数书九章》



望敌远近

敌人的兵营驻扎在北面山脚下的一块平地上，不知相距多远。为测量敌我之间的距离，选择一块平地，立一标杆，标杆高 $h_1=4$ 尺，人后退 $d=900$ 步，目测兵营，人目高 $h_2=4.8$ 尺，人目、标杆端和山脚 3 点在一条直线上。求敌我之间的距离（图 43-1）。

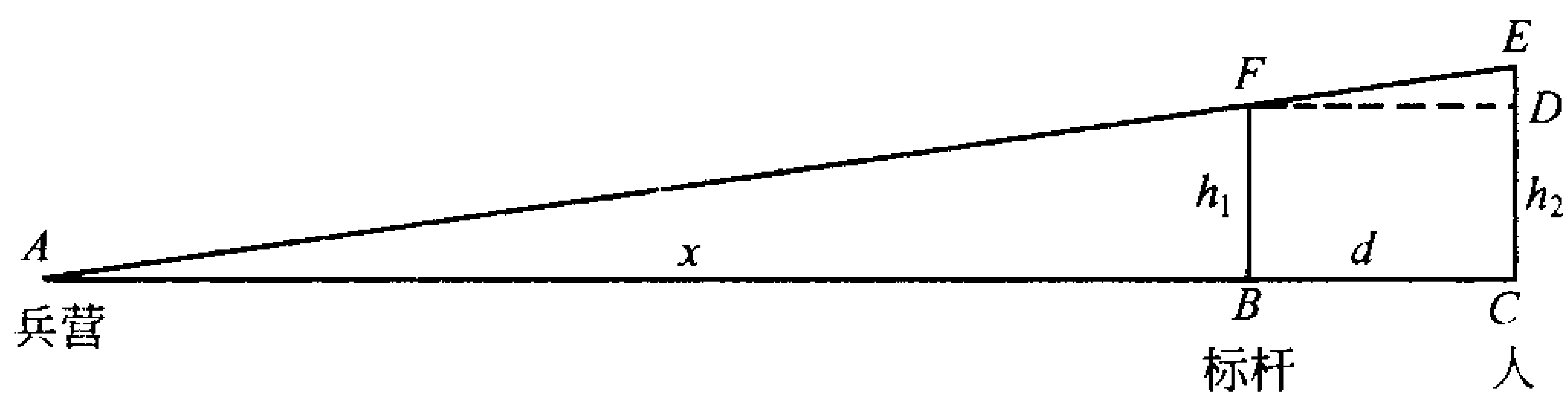



图 43-1

**解** 由$\triangle ABF \backsim \triangle FDE$ 得

$$\frac{x}{d}=\frac{h_1}{h_2-h_1},\quad x=\frac{dh_1}{h_2-h_1}$$

已知 $d=900$ 步 $=4500$ 尺，$h_1=4$ 尺，$h_2=4.8$ 尺

$$x=\frac{4500\times 4}{4.8-4}=22500\text{（尺）}$$

因为 1 步 = 5 尺，1 里 = 360 步

所以 $x=22500$（尺）$=4500$（步）$=12\frac{1}{2}$（里）

## 中算典籍 用矩之道

矩是木工用的角尺，本没有什么稀奇的地方。可在我国历史文化中的地位却不寻常，人们常说“不上规矩，不成方圆”，表明规矩是一个人成才的必要条件，是测量人才的尺度。怎么会有这么高的地位呢？原来在我国最古老的天文数学著作《周髀算经》的开头就有这样的两段话，

周公问商高："请问古者包牺立周天历度，夫天不可阶而升，地不可得尺寸而度，请问数从安出？商高曰，数之法出于圆方，圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一。"周公感慨地说："大哉言数。请问用矩之道。商高曰，平矩以正绳，偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远，环矩以为圆，合矩以为方。"就是说，矩可以正准绳，测高远，定圆方。可是怎么放置并不太清楚。沈康身先生在《九章算术导读》里解决了这个疑问。"矩尺是我国古代的测量工具，它由直角相交且刻度的长短二尺构成。长的称为股，短的称为勾。在作测量时，水平位置（横）为股，竖直位置（纵）为勾。"并画了六幅图（图 43-2），说明了用矩之道。在实际应用时，只不过是借助它构造相似的直角三角形而已。

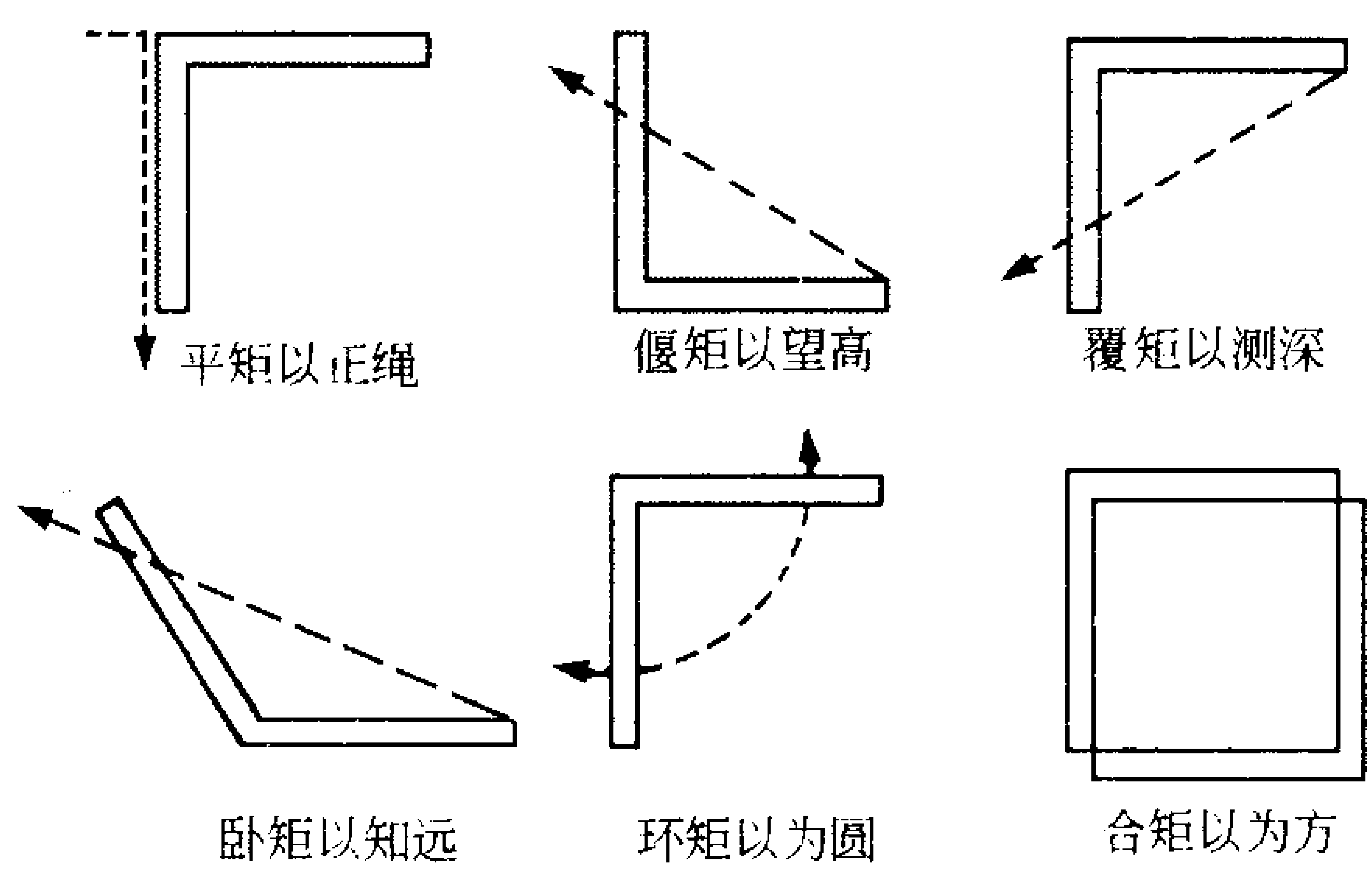



图 43-2

**读读练练**

## 练　习　题

1. 已知勾是 8 步，股 15 步，求内切圆直径。

答曰：6 步

2. 现有正方形城，边长 200 步，每边正中开门，出东门 15 步有树，问出南门走多少步能见到树?

答曰：$666\frac{2}{3}$步。

选自《九章算术》(今译)

# 44 临台测水

问临水城台，立高三丈，其上架楼，其下址侧脚阔二尺，获下排沙下椿，去址一丈二尺，外椿露土高五尺，与址下平，遇水涨时，浸至址。今水退不知多少，人从楼上栏杆腰串间，虚驾一竿出外，斜望水际，得四尺一寸五分，乃与竿端参合。人目高五尺，欲知水退立深，涸岸斜长自台址至水际，各几何？

答曰：水退立深秦答：一丈五尺一百五十七分尺之一百三十五，王答：一丈七尺一百五十七分尺之三十六；涸岸自台址至水际斜长秦答：四丈一尺一百五十七分尺之三十七，王答：四丈四尺一百五十七分尺之一百二十五

选自《数书九章新释》

有一临水的城台，台高 $h=3$ 丈（图 44-1），其上建了一座城楼，城楼下址侧脚阔 $a_3=2$ 尺，护岸排沙的木桩离岸边的距离是 $a_2=12$ 尺，土桩露出土坡面的高度为 $h_2=5$ 尺，桩顶与下址在一条水平线上。水涨时，水位到达城墙下址；水退时，不知水位多高。为测出退水的水位，今从栏杆的中间虚架1 标杆，斜望水边，使人目、竿端、水边在一条直线上。视线

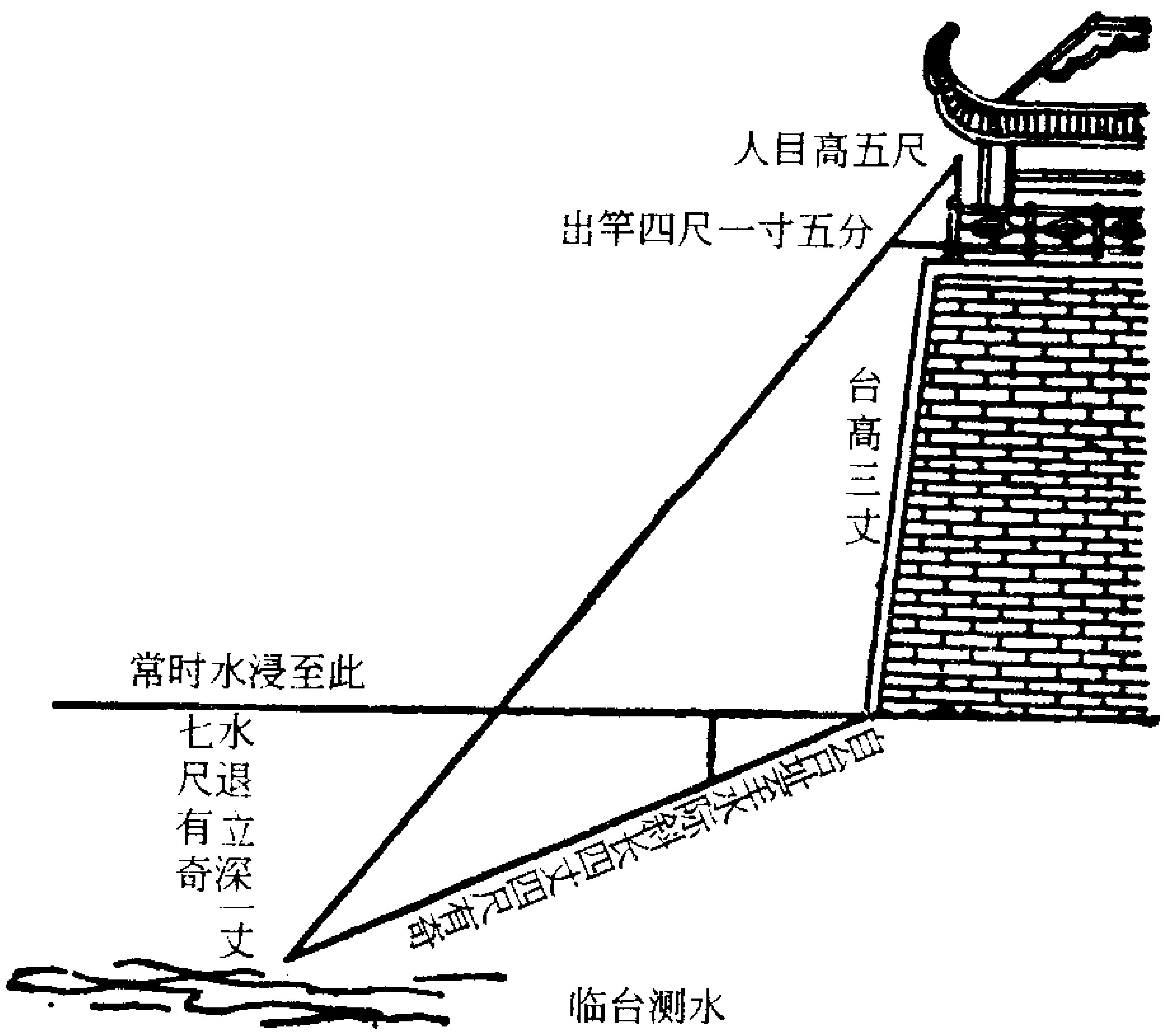



**图 44-1**

截得标杆长$a_1=4.15$ 尺，人目高 $h_1=5$ 尺，求退水时水边有多深，台址到水边护岸的斜长是多少。

**解** 如图 44-2 设水深 $GH=x$ 尺，则

$\triangle EGH \backsim \triangle EFI$，$\triangle ABC \backsim \triangle AHN$，我们得到

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} = \dfrac{a_2}{h_2} & (44-1) \\ \dfrac{h_1}{a_1} = \dfrac{h_1 + h + x}{a + a_3} & (44-2) \end{cases}$$

已知 $a_1=4.15$，$a_2=12$，$a_3=2$，$h_1=5$，$h_2=5$，$h=30$。代入 (44-1)，(44-2) 得：

$$\frac{a}{x}=\frac{12}{5},\quad a=\frac{12}{5}x \tag{44-3}$$

$$\frac{5}{4.15}=\frac{35+x}{a+2} \tag{44-4}$$

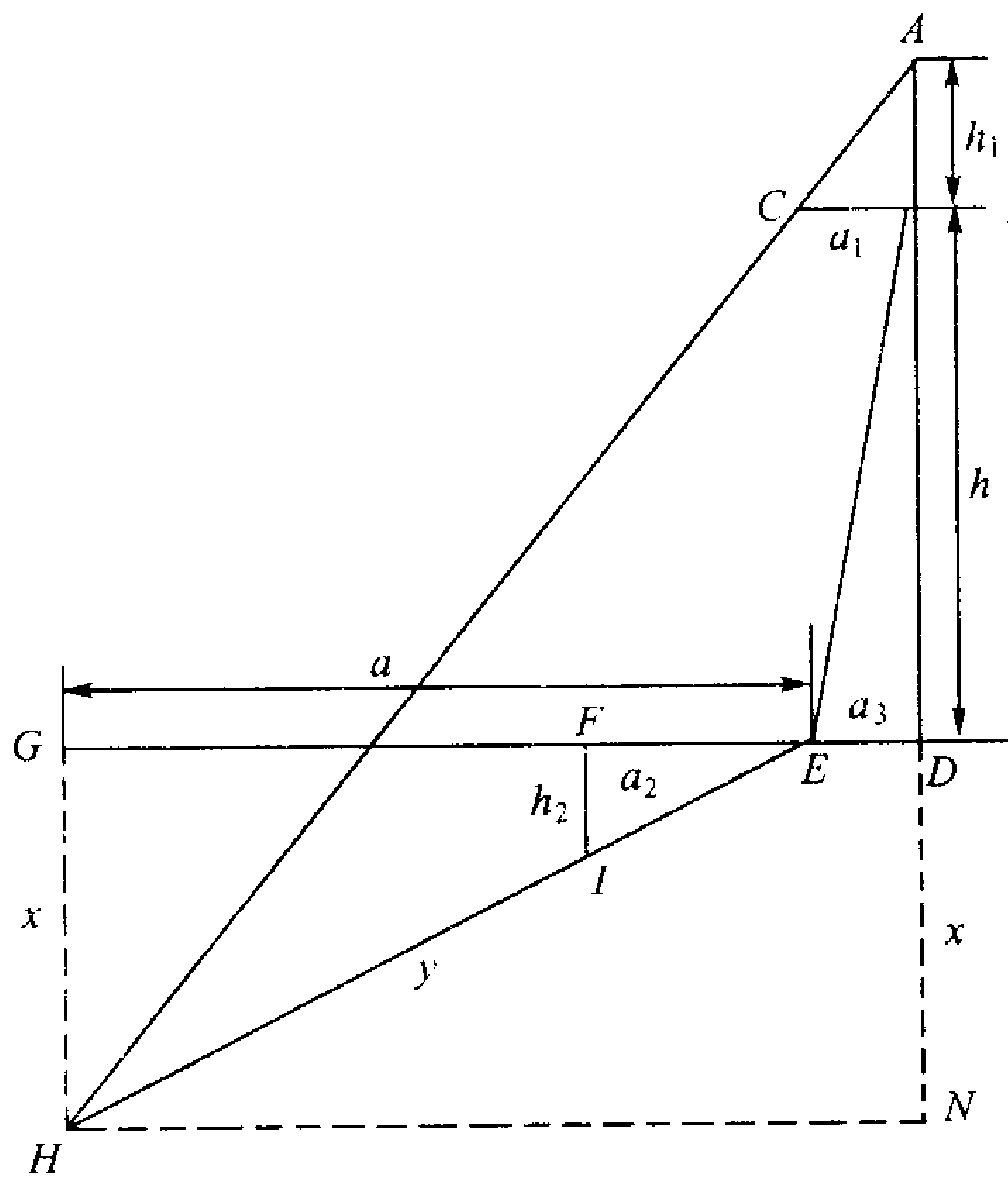



图 44-2

将（44-3）式代入（44-4）式

$$157x = 2705$$

所以 $$x = \frac{2705}{157} = 17\frac{36}{157}\ (\text{尺})$$

$$a = \frac{12}{5} \times \frac{2705}{157} = \frac{6492}{157}$$

从台址到护水边的斜长 $y$ 为

$$y = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$= \frac{7033}{157} = 44\frac{125}{157}(\text{尺})$$

说明：本题图形复杂、数据较多，但只要利用相似三角形对应边成比例定理列出方程组（44-1）、（44-2），并将已知数据直接代入计算还是比较简单的，而不需要从方程（44-1）、（44-2）推求 $x$ 和 $a$ 的表达式（44-5），因为这个式子没有实用

价值，而且计算繁琐、容易出错。

秦九韶在《数学九章》中推出的公式

$$x^2=\frac{h_2^2y^2}{a_2^2+h_2^2}$$

$$=\frac{h_2^2h(a_1hh_2)[(a_1ha_2)^2+(a_1hh_2)^2]}{(a_2^2+h_2^2)[(a_2h_1)h(a_1ha_2)-(a_1ha_2)(a_1hh_2)]^2}$$

有错，故秦氏答案不正确。

王守义推出的

$$x=\frac{h_2[a_1(h+h_1)-a_3h_1]}{a_2h_1-a_1h_2} \qquad (44-5)$$

是正确的。

**名人轶事**　　**丈量步车**

测量是人民生活中不可缺少的一项工作，无论是房屋建造，田地丈量，修河修路都需要先行丈量。我国古代大禹治水，秦始皇修建阿房宫，筑万里长城，隋炀帝修大运河等都需要精确测量。而测量工作中最基本的是量距，即测量长度。

在一般家庭中，测量长度的工具是尺，在野外用丈杆，长距离的测量用测绳。明代数学家程大位制造了一种量具，叫丈量步车，在他的《算法纂要》里画了一张构造图（图 44-3），尺心是用竹篾做成的，大概是因为竹的膨胀系数小的缘故。从尺套的构造看，像是现代皮尺或钢卷尺的前身。程氏（宾渠）对这一创造颇为欣赏，在图上题款“宾渠制就心机巧，隶首传来数学精”。把这一发明的灵感归结为中国数学的祖先隶首。

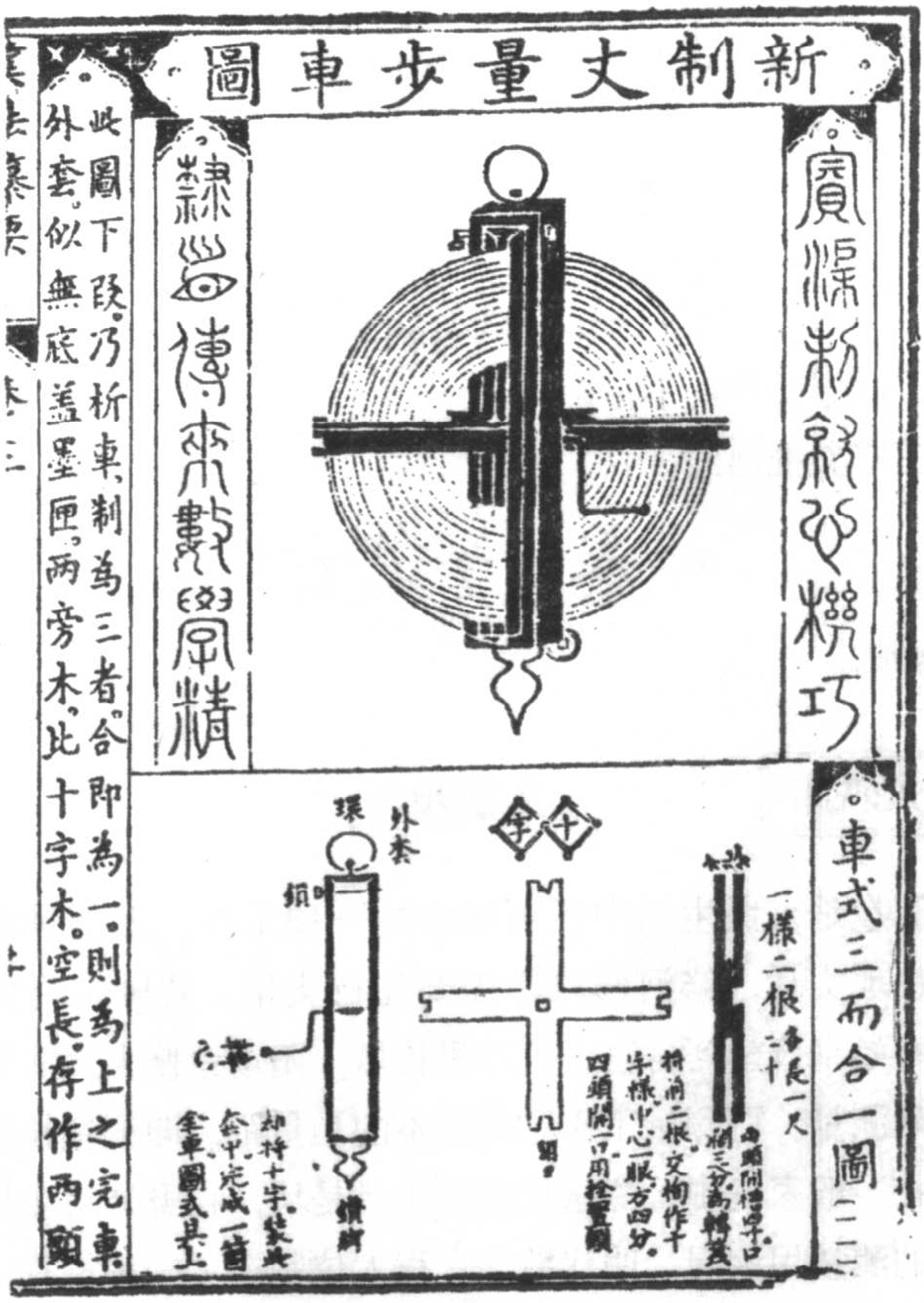

新制丈量步車圖
車式三而合一圖
此圖下段乃析車制為三者合即為一則為上之完車外套似無底蓋墨匣兩旁木比十字木空長存作兩頭
環
外套
一様二根


图 44-3

读读练练

## 练 习 题

陡 岸 测 水

问行师遇水，须计蔑缆，搭造浮桥。今垂绳量陡岸，高三丈，人立其上，欲测水面之阔，以六尺竿为矩，平持去目下五寸，今矩本抵颐，遥望水彼岸，与矩端参相合。又望水此岸沙际，入矩端三尺四寸。人目高五尺，其水面阔几何（图 44-4）？

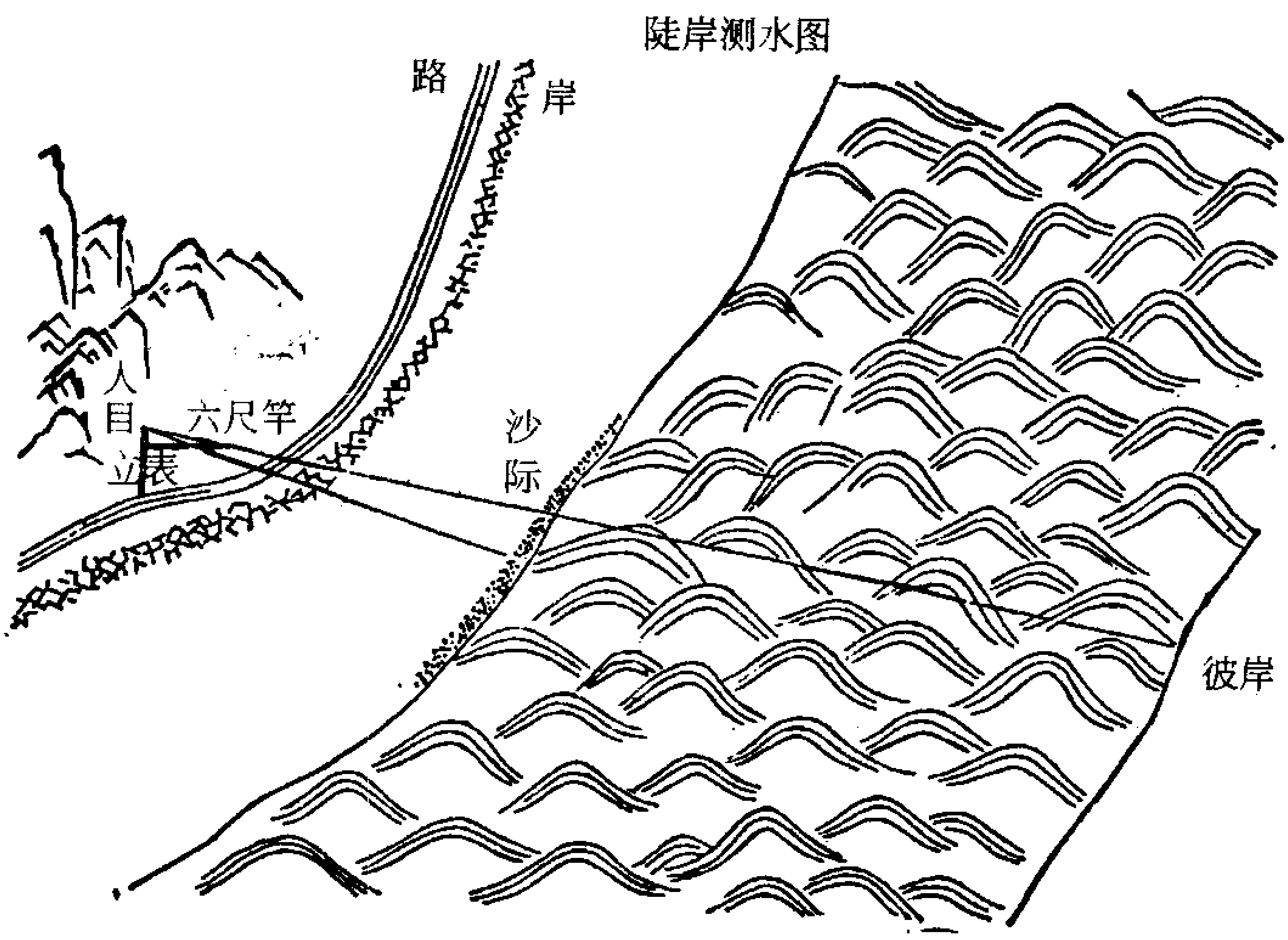



图 44-4

答曰：水阔二十三丈八尺（原答：二十三丈四尺六寸）

提示（图 44-5）

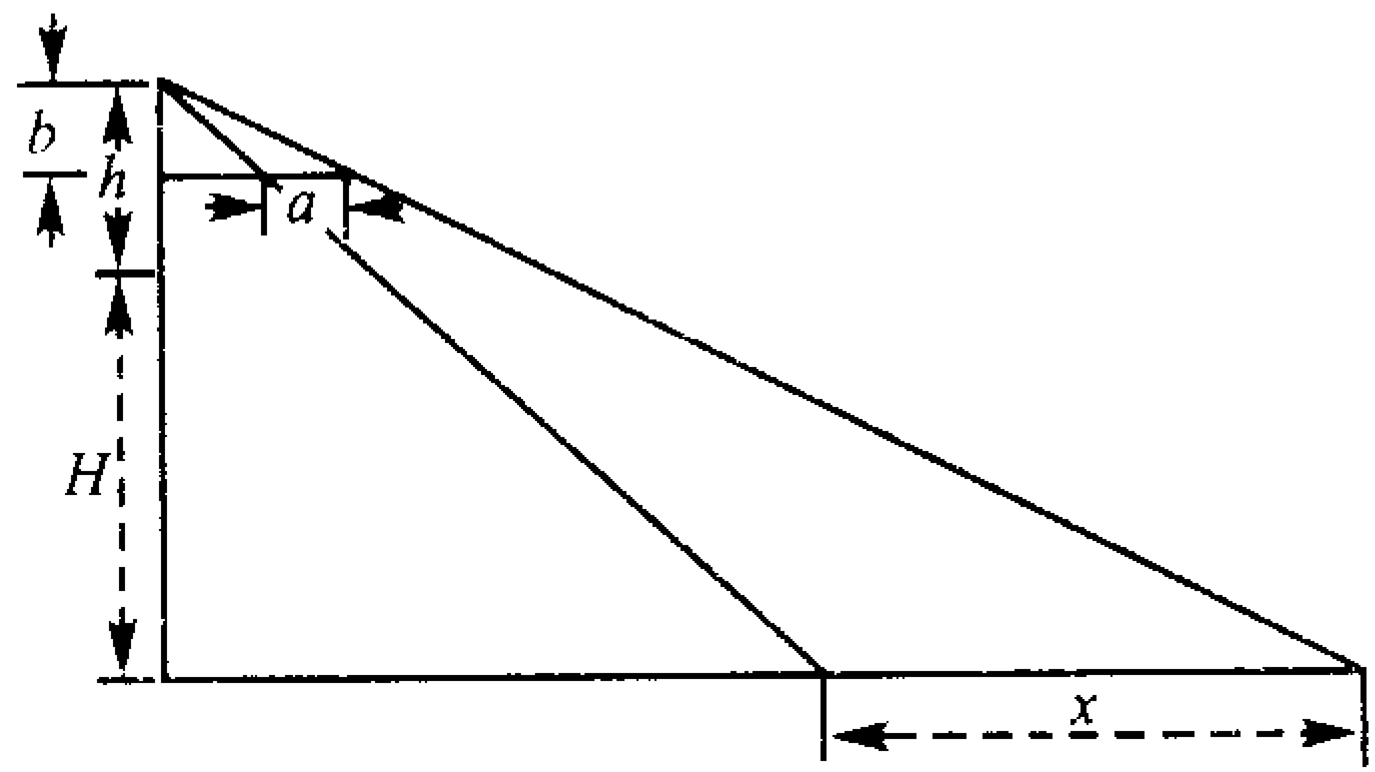



图 44-5

式中　$H=30$ 尺，$h=5$ 尺，$a=3.4$ 尺，$b=0.5$ 尺，

$$x=\frac{a\ (H+h)}{b}$$

# 45 遥度圆城

**问有圆城不知周径，四门中开，北外三里有乔木，出南门便折东行九里，乃见木。欲知城周径各几何？（圆用古法）**

**答曰：径九里，周二十七里**

选自《数书九章》

今有一圆城（如图 45-1），不知周长和直径，四门中开，出北门在正北 3 里处有一棵大树，出南门向东行 9 里，正好看见大树，求圆城的半径和周长。

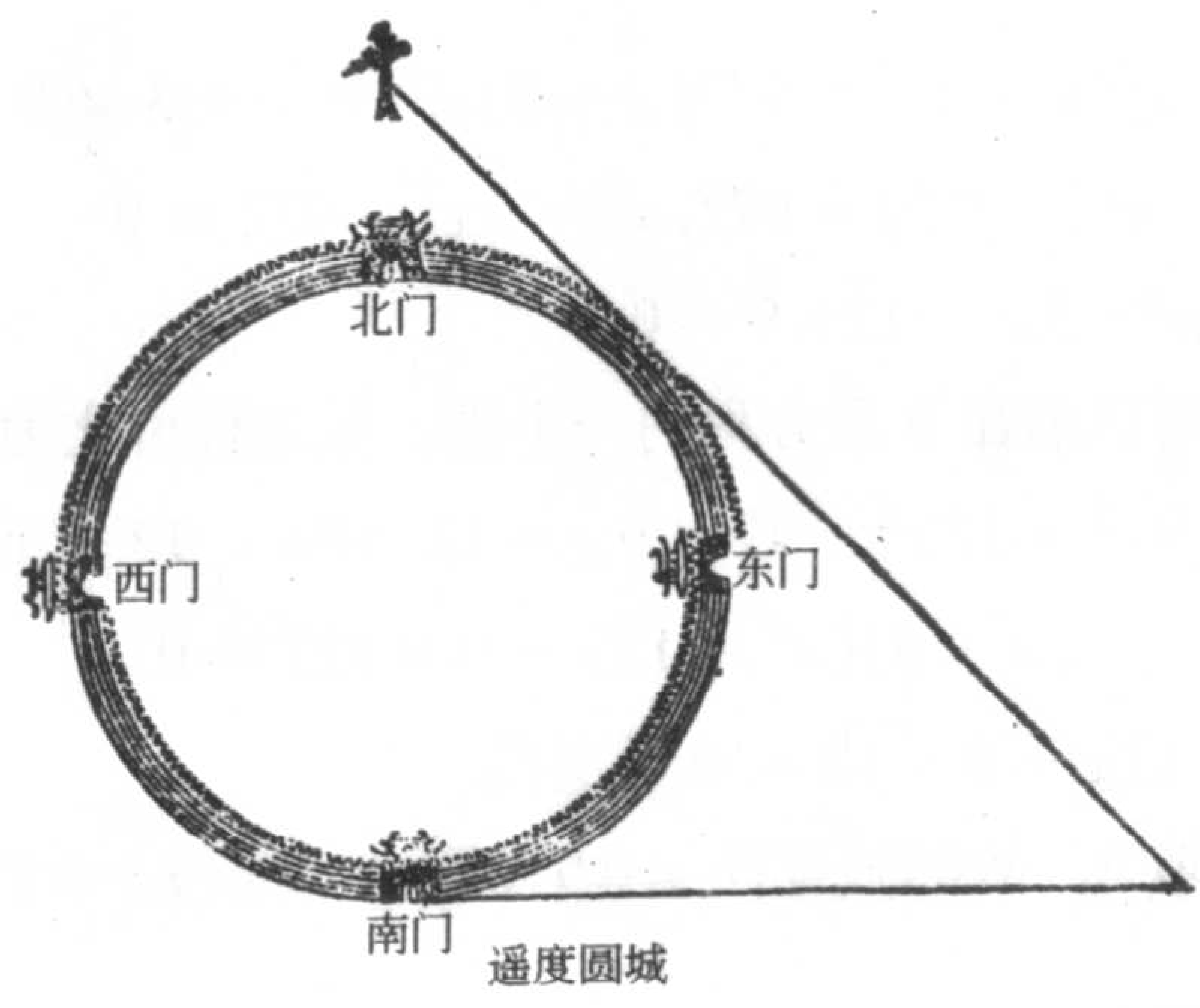



**图 45-1**

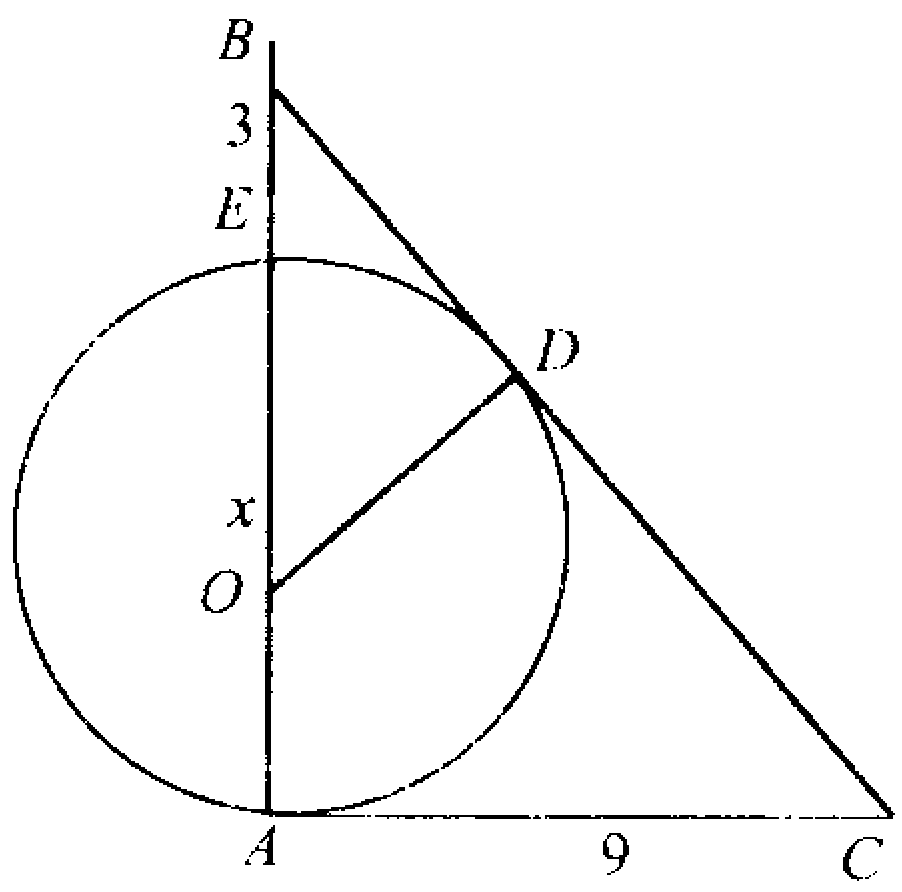



图 45-2

**解** 设圆城的直径为 $x$，则半径为$\frac{x}{2}$。$B$ 为大树，$C$ 为测点（图 45-2）

$EB=3$，$AC=9$

由$\triangle BOD\backsim\triangle BCA$

$$\frac{OD}{AC}=\frac{BD}{AB}$$

$$OD=\frac{x}{2}, AC=9, AB=x+3$$

$$BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=\sqrt{(\frac{x}{2}+3)^2-(\frac{x}{2})^2}=\sqrt{3(x+3)}$$

代入化简得

$$\frac{x}{18}=\frac{\sqrt{3(x+3)}}{x+3}$$

两边平方

$$x^2(x+3)^2=972(x+3), \text{因为 } x+3\neq 0$$

$$x^2(x+3)=972, x^3-3x^2-972=0$$

即 $x^3+3x^2-12\times 9^2=0$

由观察法可以看出 9 是方程的一个根。原方程可化为

$$x^3-9x^2+12x^2-12\times 9x+12\times 9x-12\times 9^2=0$$

$$(x-9)(x^2+12x+9\times 12)=0$$

$x^2+12x+9\times 12=0$ 无实根。

按题意 $\pi$ 取 3，故圆城直径 $x=9$（里），周长 $\pi x=27$（里）。

## 名人轶事　王守义和《数书九章新释》

秦九韶《数书九章》是我国数学经典中的精华。全书设大

衍、天时、田域、测望、赋役、钱谷、营建、军旅、市物九章81问，上自天文星象，下至地理民情，包罗万象。它既是一本数学著作，也是那个时代经济、科技、政治、生活的记录，有很高的理论价值和研究价值。秦氏继承和发展了《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》等中的理论和方法，而且在大衍求一术、正负开方术、线性方程组、三斜求积术等方面都有重大的发明和创新，在世界数学史上写下了光辉的一页。

由于秦氏《数书》内容艰深难读，尽管从古到今不少人对该书作注、校勘、写读书札记，但难读依然，流传不广。今天，将该书译到广大数学工作者、中小学教师、大学生乃至高中学生能读的程度，确实是一件很不容易的事。西北师范学院王守义先生在十分困难的条件下完成了这项很有意义的工作。

王守义（1912—1976），山东清平县人。1935年考入齐鲁大学，1937年抗日战争爆发后，辗转到武汉，在武汉大学数学系借读，1939年毕业并换发齐鲁大学毕业证书。1954年调到兰州西北师范学院数学系任讲师。在此期间认识了中算史专家李俨。在李先生的热情关怀与支持下，他力译《数书九章》写成《数书九章新释》（后称《新释》）一书。经李俨先生推荐，1956年10月列入科学出版社出版计划。李迪先生评价："王先生的《新释》是一部严肃的、有很高学术水平的学术著作，他对《数书九章》的研究下了很大功夫，把所有难懂的术语和解算过程都按原书的段落详加解释，将书中的成就和精华清楚地呈现在读者面前。"也许因为1957年的错案，该书的出版计划撤销，"出版"一事第一次落空。1964年中华书局又把《新释》列入出版计划，不知何故"出版"第二次落空。

改革开放以来，中算史界犹如“春风又绿”，呈现出一派欣欣向荣的景象：学术会议不断，研究成果累累。特别是在吴文俊、白尚恕、沈康身、李迪、李继闵诸位先生的筹划和参与下，《中国数学史大系》出版，这是我国数学界的一项基础建设。

在这频繁的中算史研究活动中，李迪先生根据以前的一点淡薄印象，一直在寻访《新释》书稿的下落。通过多方努力，终于找到了王先生的《新释》遗稿，并写了《〈数书九章新释〉和它的作者王守义先生》作为代序，由孙述庆先生执编，安徽科技出版社出版，使王先生三十年前三十五万字的劳动成果终于能贡献社会并以此告慰王老。可以说，这本书是党的改革开放政策滋润下的中算研究之花，也是我国新老数学家为祖国数学事业团结奋进、勤奋耕耘之果。

**读读练练**

## 练 习 题

### 表望方城

问敌城不知广远。傍城南山原林间望之，林际有木二株，南北相去一百六十步，遥与城东方面参相直。于二木之东，相对立表，表间与木四方平。人目以绳准之，人自东表后，向西行一十步，望城东北隅，入东前表一十五步。又望城东南隅，入东前表四十八步强半步，里法三百六十步。欲知其方广及相去几何？

答曰：城方广各一十一里二百二十步三十一分步之二十

选自《数书九章新释》

提示：如图 45-3，图 45-4，求 $x$，$y$。

$$\frac{y}{h}=\frac{h-b}{b-d}$$

$$y=\frac{h(h-b)}{b-d}$$

$$\frac{x+y}{h}=\frac{h-a}{a-d}$$

$$x=\frac{h(h-a)}{a-d}-y$$

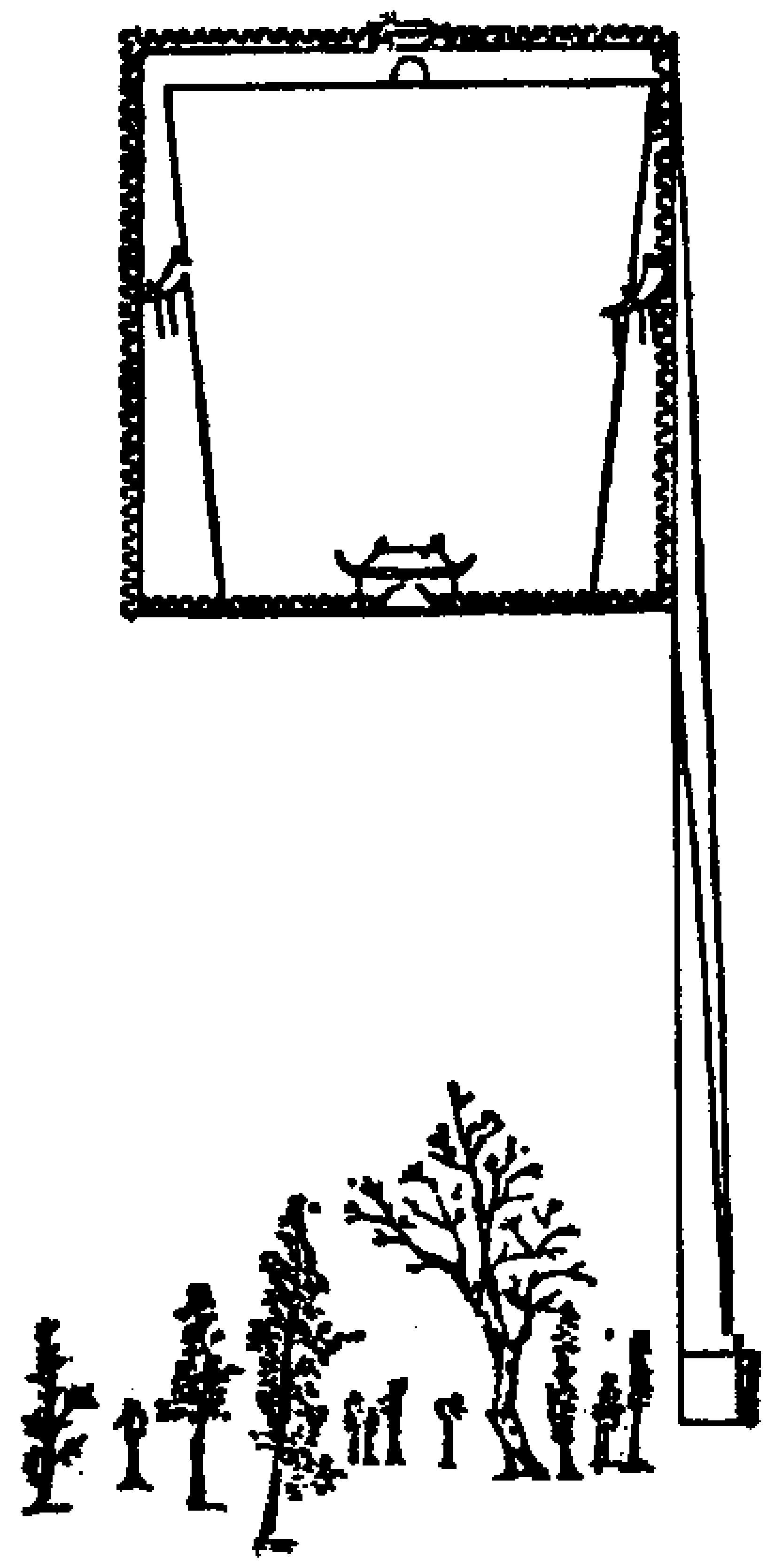


图 45-3

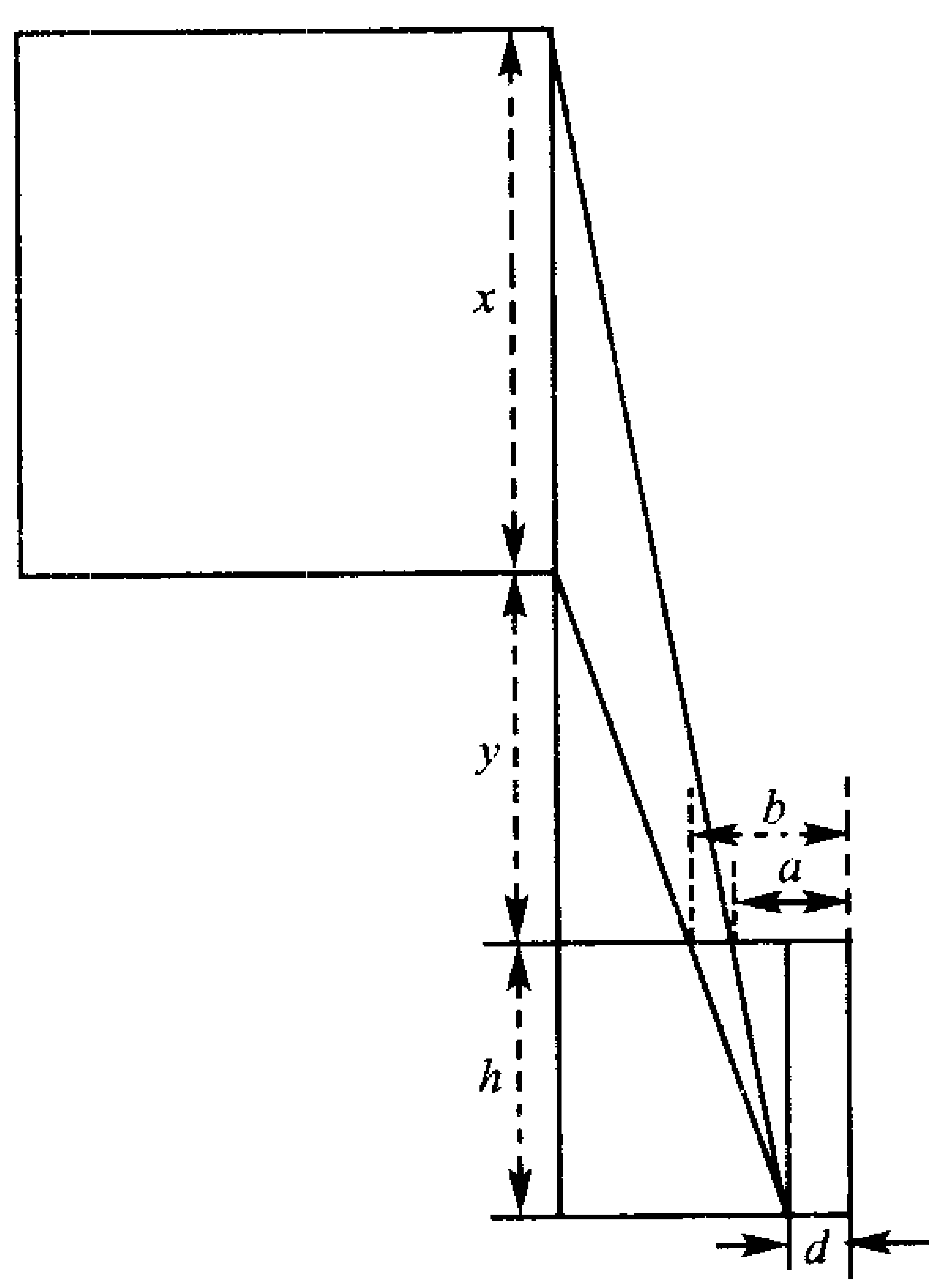



图 45-4

# 参 考 文 献


M. 克莱因 .1979. 古今数学思想 . 上海：上海科技出版社
白尚恕等 .1986. 中国数学简史 . 济南：山东教育出版社
白尚恕 .1983.《九章算术》注释 . 北京：科学出版社
白尚恕 .1985. 测圆海镜今译 . 济南：山东教育出版社
陈景润 .1978. 初等数论 . 北京：科学出版社
郭熙汉 .1996. 杨辉算法导读 . 武汉：湖北教育出版社
李培业 .1986.《算法纂要》校释 . 合肥：安徽教育出版社
梁宗巨 .1995. 世界数学通史 . 沈阳：辽宁教育出版社
梁宗巨 .1995. 数学历史典故 . 沈阳：辽宁教育出版社
马克思 .1975. 数学手稿 . 北京：人民出版社
梅荣照，李兆华 .1990. 程大位《算法统宗》校释 . 合肥：安徽教育出版社
钱宝琮 .1981. 中国数学史 . 北京：科学出版社
沈康身 .1986. 中算导论 . 上海：上海教育出版社
沈康身 .1996. 九章算术导读 . 武汉：湖北教育出版社
沈康身 .2002. 历史数学名题赏析 . 上海：上海教育出版社
王健吾 .1996. 数学思维方法引论 . 合肥：安徽教育出版社
王守义 .1992.《数书九章》新释 . 合肥：安徽科技出版社
吴让泉等 .1992. 中华数学的智慧之光 . 杭州：浙江人民出版社
吴文俊 .1982.《九章算术》与刘徽 . 北京：北京师范大学出版社
吴文俊 .1987. 秦九韶与《数书九章》. 北京：北京师范大学出版社
吴文俊 .1998. 中国数学史大系 . 北京：北京师范大学出版社
解恩泽，徐本顺 .1994. 世界数学家思想方法 . 济南：山东教育出版社
袁小明，胡炳生，刘逸 .1999. 中华数学之光 . 长沙：湖南教育出版社